香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2015 – 2016

建議題解

甲部 (每題 2 分)

1 【$180°$】

2 【672】

設正方形的邊長為 $14x$

$14x^2 = 2016$

$\therefore x = 12$

因此，原來正方形的周界為 $4\times14\times12 = 672$。

3 【672】

$2016 \div 3 = 672$

4 【504 元】

設各人把 x 元給 A。

$$\frac{3x}{3x+4x+5x}\times2016 = 504$$

5 【7】

$0 \le (14N)^2 \le 2016$

$0 \le N^2 \le \frac{72}{7}$

$\therefore N = -3$、-2、-1、0、1、2、3

6 【59】

經試驗，將這五個數由小至大排列

$x-15, x-12, x-9, 54, x+2$

$\therefore x-9 = 50$，$x = 59$

7 【75.5 cm】

設 CD= x cm。

$\sqrt{26^2 - 24^2} = 10$

$\sqrt{25^2 - 24^2} = 7$

$$\frac{(x+x+10+7)}{2}\times 24=2016$$
$$\therefore x=75.5$$

8　【1524】

要使八個三位數的和最小，1 及 2 必須在相對面，3 及 4 亦然。每個面的數字恰好用了 4 次，因此，A 的最小值為 $(100+200+30+40+5+6)\times 4=1524$。

9　【2080】

$$\frac{(1+k)k}{2}=2016,\ k=63$$

$\therefore$ 下一個三角形數的年份 $=2016+64=2080$

10　【3】

在 x、y、z 中，必有一個為偶數，所以 $x=2$，則 $y+z=2014$。

因 3+2011=2014，3 及 2011 均為質數，$y=3$。

11　【25】

$$2016^5=(2^5\times 3^2\times 7)^5=2^{25}\times 3^{10}\times 7^5$$
$$2016^5\times 5^{2016}=3^{10}\times 5^{1991}\times 7^5\times 10^{25}$$

12　【87】

可觀察出下一張紙片的數碼為 123 不是由二位數組成。因 1 到 122 共有 $9+90\times 2+23\times 3=3\times 86$ 個數碼且這是 3 的倍數，故下一張紙片上的數碼為 123 恰是由數 123 組成，為第 87 張。

13　【-2】

由 $2=(a-c)(a-d)=a^2-ad-ac+cd$

及 $2=(b-c)(b-d)=b^2-bd-bc+cd$ 得

$$a^2-b^2=ad+ac-bd-bc=(a-b)(c+d)$$

即 $a+b=c+d$。所以 $(a-c)(b-c)=-(b-d)(b-c)=-2$。

14　【165】

由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2016}$ 得 $(x-2016)(y-2016)=2016^2=2^{10}\times 3^4\times 7^2$。

因此共有 $(10+1)\times(4+1)\times(2+1)=165$ 組解。

15 【$\frac{1}{2}$】

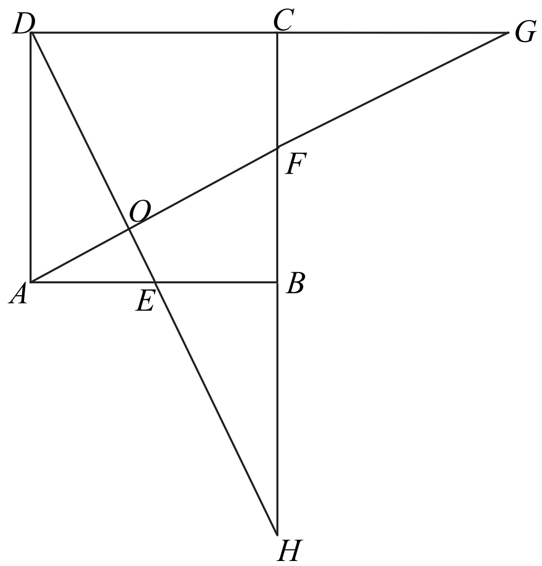
延長 DE、CB，令其交點為 H。延長 AF、DC，令其交點為 G。

可知 $\Delta ADE \cong \Delta BHE$ 及 $\Delta ABF \cong \Delta GCF$。

$\frac{DO}{OH} = \frac{AD}{FH} = \frac{2}{3}$ $\therefore$ $DO = \frac{2}{5}DH$

$\frac{AO}{OG} = \frac{AE}{DG} = \frac{1}{4}$ $\therefore$ $AO = \frac{1}{5}AG = \frac{1}{5}DH$

$\therefore$ $\frac{AO}{DO} = \frac{1}{2}$



另解： 觀察到 ΔAOD~ΔEAD，因此 $\frac{AO}{DO} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$ 。

16 【81】

任何 99 人(=130–31)所得波子總數不會少於 2016-531=1485 粒，即任何 1 人所得波子不會少於 15 粒。

$\therefore$所得波子最多的一人有 2016 –129(15) = 81 粒。

17 【$\frac{3}{2}$ cm^2】

因 AD 為角 CAB 的角平分線，$[DAC] : [ABD] = AC : AB$ =5:3。

另外，由於三角形 ABD 與三角形 AED 全等(AAS)，

所以$[CDE] : [ABC] = ([DAC] - [ABD]) : ([DAC] + [ABD]) = (5 - 3) : (5 + 3) = 1 : 4$。

故三角形 CDE 的面積= $(\frac{3\times 4}{2})\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ cm^2。

18 【$\frac{7}{18}$】

由於三角形 WTP、 PSV、 RPU 及 ABC 為相似三角形，我們可得出

$$\Delta WTP : \Delta PSV : \Delta RPU : \Delta ABC = TP^2 : SV^2 : PU^2 : BC^2$$
$$= BS^2 : SV^2 : VC^2 : BC^2$$

因此，$\sqrt{\Delta WTP} = k\,BS$、$\sqrt{\Delta PSV} = k\,SV$、$\sqrt{\Delta RPU} = k\,VC$ 及

$\sqrt{\Delta WTP} + \sqrt{\Delta PSV} + \sqrt{\Delta RPU} = k\,(BS + SV + VC) = k\,BC = \sqrt{\Delta ABC}$ 。

$\sqrt{\Delta PSV} = 2\sqrt{\Delta WTP}$ 及 $\sqrt{\Delta RPU} = 3\sqrt{\Delta WTP}$ ，

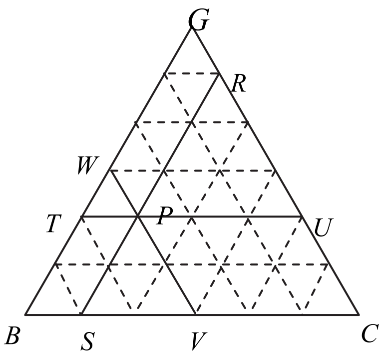
$\therefore\ 6\sqrt{\Delta WTP} = \sqrt{\Delta ABC}$ ，即 $36\,\Delta WTP = \Delta ABC$。

由於 $\Delta ABC = 1$， $\Delta WTP = \dfrac{1}{36}$ ， $\Delta PSV = 4 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{9}$ ，$\Delta RPU = 9 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{4}$ ，

$\Delta WTP + \Delta PSV + \Delta RPU = \dfrac{7}{18}$。

備註:

一個可求出答案而無需太多運算的**快捷**方法是構作三組線，分別平行於三角形 ABC 的各邊及通過每邊的五點等距劃分點，見下圖。我們總共可得出 36 個全等三角形，ΔWTP 佔了其中一個， ΔPSV 佔了其中四個，而 ΔRPU 佔了其中九個。



乙部　(每題 6 分)

19　【(a)21　(b)60】

	第一次傳球後	第二次傳球後	第三次傳球後	第四次傳球後
A	B	A	B	A
			C	A
			D	A
		C	B	A
			D	A
		D	B	A
			C	A
	C	A	B	A
			C	A
			D	A
		B	C	A
			D	A
		D	B	A
			C	A
	D	A	B	A
			C	A
			D	A
		B	C	A
			D	A
		C	B	A
			D	A

若無限制，每次傳球都有 3 種方法。

若要經過 1 次傳球後，球不可能在 A 手中。即 0 種方法。

若要經過 2 次傳球後，球回到 A 手中，就要經過 1 次傳球後，球不能在 A 手中。即$3^1-0=3$種方法。

若要經過 3 次傳球後，球回到 A 手中，就要經過 2 次傳球後，球不能在 A 手中。即$3^2-3=6$種方法。

若要經過 4 次傳球後，球回到 A 手中，就要經過 3 次傳球後，球不能在 A 手中。即$3^3-6=21$種方法。

若要經過 5 次傳球後，球回到 A 手中，就要經過 4 次傳球後，球不能在 A 手中。即$3^4-21=60$種方法。

20 【$\frac{1}{42}$】

由於 $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}<1$ ， k、m 及 n 均大於一，而其中一個，假設是 n，必為 2，否則最小值便會是 $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13}{60}>\frac{1}{42}$ 。

問題便化簡為求 $\frac{1}{2}-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}$ 的最小值使得 $\frac{1}{m}+\frac{1}{k}<\frac{1}{2}$。利用相同方法，$m, k>2$ 及其中一個，假設是 m，必為 3，否則最小值便會是 $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}>\frac{1}{42}$ 。

最後，便是求 $\frac{1}{6}-\frac{1}{k}$ 的最小值使得 $\frac{1}{k}<\frac{1}{6}$，所以必須取 $k=7$。

因此，$1-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}$ 的最小值為 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$。

21 【1960】

我們只需要考慮所有 n 次數，其中 n 為 1 至 2016 之間的質數。同時，我們只需算至七次數，即是考慮 n 為 2、3、5 及 7，算一算所有不超過 2016 的 n 次數。

$44^2=1936$ 及 $45^2=2025$，共有 44 個二次數；

$12^3=1728$ 及 $13^3=2197$，共有 12 個三次數；

$4^5=1024$ 及 $5^5=3125$ ，共有 4 個五次數；

$2^7=128$ 及 $3^7=2187$ ，共有 2 個七次數；

當中有 3 個數同時是二次數及三次數(也即是六次數 1、64 及 729)，有 2 個數同時是二次數及五次數(也即是十次數 1 及 1024) 。除此之外，1 是唯一一個數，同時為二次數、三次數、五次數及七次數。

利用排容原理，在 1 至 2016 中，n 次數的數目為

$(44+12+4+2)-(3+2+1+1+1+1)+(1+1+1+1)-1=56$。

所以有 $2016-56=1960$ 正整數不是 n 次數，其中 n 為一個大於 1 的整數。

備註:

以下為 56 個在 1 至 2016 中的 n 次數：

1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49,
64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, 196, 216,
225, 243, 256, 289, 324, 343, 361, 400, 441, 484,
512, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961,
1000, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1331, 1369, 1444, 1521,
1600, 1681, 1728, 1764, 1849, 1936。

~ 全卷完 End of paper ~

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、李文生博士(香港大學)、
馮德華老師、徐崑玉老師、鄭永權老師、郭家強老師、潘維凱老師