

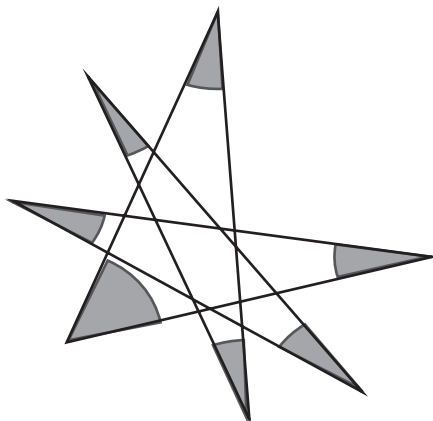
香港青少年數學精英選拔賽  
**The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest**  
 2015 – 2016

甲部 (每題 2 分)

把答案填在答題紙所提供的位置。

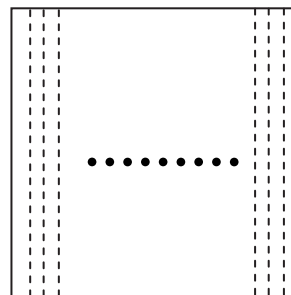
1. 圖中的為一個七角星。求圖中七隻陰影角之和。

The figure shows a 7-pointed star. Find the sum of the seven marked angles.



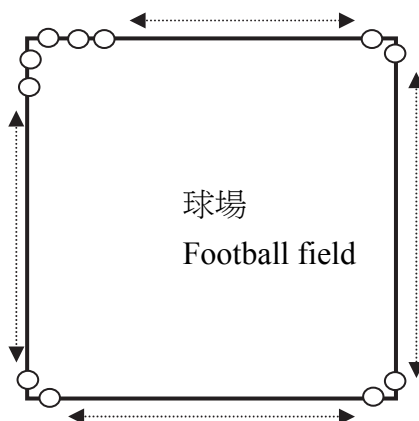
2. 圖中，一個正方形被平分成十四個全等長方形，若每一個長方形的面積為 2016，求正方形的周界。

In the figure, a square is equally divided into fourteen identical rectangles. If the area of each rectangle is 2016, find the perimeter of the square.



3. 在一足球場邊界放置了 2016 張椅子，當  $n$  個人就坐後，下一人無論選擇任何座位，都會至少與該  $n$  個人之中的其中一人相鄰，求  $n$  的最小值。

2016 seats are arranged along the boundary of a football field. After  $n$  people have each taken a seat, it is found that the next person, whatever seat he/she has chosen, must be at least adjacent to one of the  $n$  people. Find the smallest possible value of  $n$ .



4. A 身上沒有錢，而 B、C 及 D 有錢。

若 B 把自己  $\frac{1}{3}$  的錢給 A，若 C 把自己  $\frac{1}{4}$  的錢給 A，而 D 把自己  $\frac{1}{5}$  的錢給 A。最後，發現 B、C 及 D 給 A 的錢是一樣多，而他們 4 人共有 2016 元。問 A 現有多少元？

A does not have any money while B, C and D have. If B gives  $\frac{1}{3}$  of his to A, C gives  $\frac{1}{4}$  of his to A and D gives  $\frac{1}{5}$  of his to A, then the amount given by each of B, C and D are equal and four people altogether have \$2016. How much does A have now?

5.  $N$  為整數。若  $N$  與 14 的積的平方不大於 2016，問滿足以上條件的整數  $N$  有多少個？

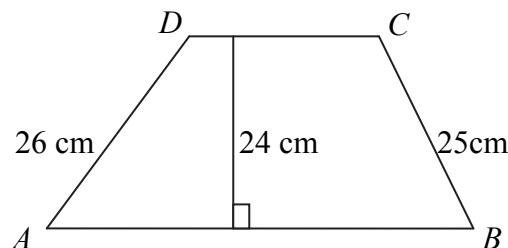
$N$  is an integer. The square of the product of  $N$  and 14 is not greater than 2016. Find the number of integer  $N$  satisfying the above condition.

6. 若五個整數  $54$ 、 $x - 9$ 、 $x - 12$ 、 $x - 15$  及  $x + 2$  的中位數為 50，求  $x$  的值。

If the median of five integers  $54, x - 9, x - 12, x - 15$  and  $x + 2$  is 50, find the value of  $x$ .

7. 圖中，梯形  $ABCD$  的面積為  $2016 \text{ cm}^2$ ， $AD = 26 \text{ cm}$ ， $BC = 25 \text{ cm}$  及高為  $24 \text{ cm}$ ，求  $CD$ 。

In the figure, the area of trapezium  $ABCD$  is  $2016 \text{ cm}^2$ ,  $AD = 26 \text{ cm}$ ,  $BC = 25 \text{ cm}$  and the height is  $24 \text{ cm}$ . Find  $CD$ .



8. 在一個正方體的六個面分別填上 1、2、3、4、5 和 6。若將緊鄰每個頂點的三個面上的數字組成一個三位數，共可得八個三位數。設  $A$  是這八個三位數的和，求  $A$  的最小值。

Each face of a cube is written a number, namely 1, 2, 3, 4, 5, and 6. The number on the three adjacent faces at each common vertex are used to form three-digit numbers, there are eight three-digit numbers can be formed. Suppose  $A$  is the sum of the eight three-digit numbers, find the smallest value of  $A$ .

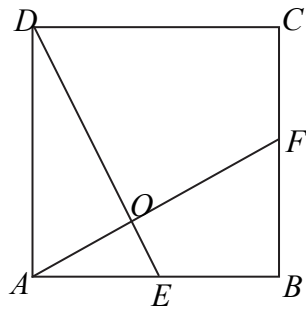
9. 若  $N = 1 + 2 + 3 + \dots + k$ ， $k$  為整數，我們稱  $N$  為三角形數。

2016 年是一個三角形數年份，則下一個三角形數年份是哪年？

If  $N = 1 + 2 + 3 + \dots + k$ ,  $k$  is an integer, we call  $N$  a triangular number.

Year 2016 is a triangular year, what is the next triangular year?

10.  $x, y, z$  均為質數，且  $x < y < z$ ，若  $x + y + z = 2016$ ，求  $y$  的最小值。  
 $x, y$  and  $z$  are prime numbers, where  $x < y < z$ . If  $x + y + z = 2016$ , find the smallest value of  $y$ .
11.  $2016^5 \times 5^{2016}$  的結尾有多少個零？  
 Find the number of trailing zeros in  $2016^5 \times 5^{2016}$ .
12. 將自然數由小至大寫在一條很長的紙帶上，即 123456789101112131415...。  
 然後依每三個數碼的長度將紙帶剪成小紙片，例如 123, 456, 789, 101, 112, 131, ...。第一張小紙片出現的數碼是 123，下一張紙片上的數碼為 123 的是第  $n$  張，求  $n$  的值。  
 Natural numbers are written down on a strip of paper in ascending order :  
 123456789101112131415.... The paper is then cut into pieces, each of them contains 3 digits. For example, 123, 456, 789, 101, 112, 131, .... The digits appear on the first piece is 123 and the next piece with digits 123 on it is the  $n^{\text{th}}$  piece. Find  $n$ .
13. 設  $a, b, c, d$  為四個相異實數，且滿足  $(a - c)(a - d) = 2$  與  $(b - c)(b - d) = 2$ ，求  $(a - c)(b - c)$  的值。  
 Let  $a, b, c, d$  be four distinct real numbers such that  $(a - c)(a - d) = 2$  and  $(b - c)(b - d) = 2$ . Find the value of  $(a - c)(b - c)$ .
14. 問滿足  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$  的正整數組  $(x, y)$  共有幾個？  
 Find the number of pairs of positive integers  $(x, y)$  such that  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$ .
15. 圖中， $ABCD$  為正方形。 $E, F$  分別為  $AB, BC$  的中點， $AF$  與  $DE$  相交於點  $O$ 。求  $\frac{AO}{DO}$  的值。  
 In the figure,  $ABCD$  is a square.  $E, F$  are midpoints of  $AB$  and  $BC$  respectively,  $AF$  and  $DE$  intersect at  $O$ . Find the value of  $\frac{AO}{DO}$ .



16. 將 2016 粒波子分給 130 人，若任何 31 人所得波子的總數都不超過 531 粒，求 1 人分得波子的最大可能數量？

Divide 2016 marbles among 130 people. If the total number of marbles obtained by any 31 people is not greater than 531, find the greatest possible number of marbles obtained by one person.

17. 三角形  $ABC$  的三邊分別為  $AB = 3\text{cm}$ 、 $BC = 4\text{cm}$  及  $CA = 5\text{cm}$ 。點  $D$  在  $BC$  上並使  $AD$  平分角  $CAB$ 。  $E$  為  $D$  到  $AC$  之垂足。求三角形  $CDE$  之面積。

In triangle  $ABC$ ,  $AB = 3\text{ cm}$ ,  $BC = 4\text{ cm}$  and  $CA = 5\text{ cm}$ .  $D$  is a point on  $BC$  such that  $AD$  bisects angle  $CAB$ .  $E$  is the foot of perpendicular from  $D$  to  $AC$ . Find the area of triangle  $CDE$ .

18. 由三角形  $ABC$  內一點  $P$ ，劃上分別平行於  $AB$ 、 $BC$  及  $CA$  的直線  $RPS$ 、 $TPU$  及  $VPW$ ，其中  $T$  及  $W$  在  $AB$  之上， $S$  及  $V$  在  $BC$  之上， $R$  及  $U$  在  $CA$  之上。

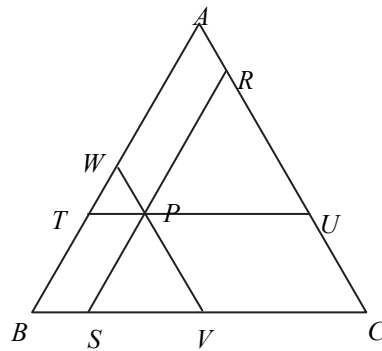
假設  $\Delta WTP : \Delta PSV : \Delta RPU = 1 : 4 : 9$  及  $\Delta ABC = 1$ ，計算

$\Delta WTP + \Delta PSV + \Delta RPU$ ，其中  $\Delta WTP$ 、 $\Delta PSV$ 、 $\Delta RPU$  及  $\Delta ABC$  代表對應三角形的面積。

Through a point  $P$  within a triangle  $ABC$ , straight lines  $RPS$ ,  $TPU$  and  $VPW$  are drawn parallel to  $AB$ ,  $BC$  and  $CA$  respectively, with  $T$  and  $W$  lying on  $AB$ ,  $S$  and  $V$  lying on  $BC$ ,  $R$  and  $U$  lying on  $CA$ .

Suppose  $\Delta WTP : \Delta PSV : \Delta RPU = 1 : 4 : 9$  and  $\Delta ABC = 1$ , calculate

$\Delta WTP + \Delta PSV + \Delta RPU$ , where  $\Delta WTP$ ,  $\Delta PSV$ ,  $\Delta RPU$  and  $\Delta ABC$  denote the areas of the respective triangles.



乙部 (每題 6 分)

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

19. 4 個人正進行傳球訓練，每個人接球後都可任意將球傳給其他人。現由 A 首先作出第一次傳球，經過 (a) 4 次 (b) 5 次

傳球後，問有多少種傳球的路徑，使球回到 A 手中？

4 people are undergoing a ball passing training in which each of them are free to pass the ball to anyone. A starts to pass the ball. How many different paths of ball passing are there so that the ball will be returned to A after (a) 4 times of ball passing? (b) 5 times of ball passing?

20. 求  $1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{k}$  的最小值，其中  $k$ 、 $m$  及  $n$  為三個不同的正整數使得

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} < 1 \text{。}$$

Find the smallest possible value of  $1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{k}$ , where  $k$ ,  $m$  and  $n$  are three distinct positive integers such that  $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} < 1$ .

21. 若一個正整數  $x$  滿足  $x = k^n$ ，其中  $k$  為一個正整數，則  $x$  為一個  $n$  次數 (其中  $n$  為一個大於 1 的整數)。

例如：1 為一個  $n$  次數，其中  $n$  為任何大於 1 的正整數；4 為一個二次數，但不是一個三次數；64 為一個二次數，也是一個三次數；但 12 不是一個  $n$  次數，其中  $n$  為任何一個大於 1 的整數。

在 1 至 2016 (包括首尾兩數) 中，有多少個正整數不是  $n$  次數，其中  $n$  為一個大於 1 的整數？

A positive integer  $x$  is an  $n^{\text{th}}$  power (where  $n$  is an integer larger than 1) if  $x = k^n$  for some positive integer  $k$ .

For example, 1 is an  $n^{\text{th}}$  power for any positive integer  $n$  larger than 1. 4 is a second power but not a third power, while 64 is a second power as well as a third power. But 12 is not an  $n^{\text{th}}$  power for any integer  $n$  larger than 1.

How many positive integers between 1 and 2016 (inclusive) are NOT an  $n^{\text{th}}$  power for some integer  $n$  larger than 1?

~ End of paper ~

~ 全卷完 ~

擬題委員會：

蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、李文生博士(香港大學)、  
馮德華老師、徐崑玉老師、鄭永權老師、郭家強老師、潘維凱老師