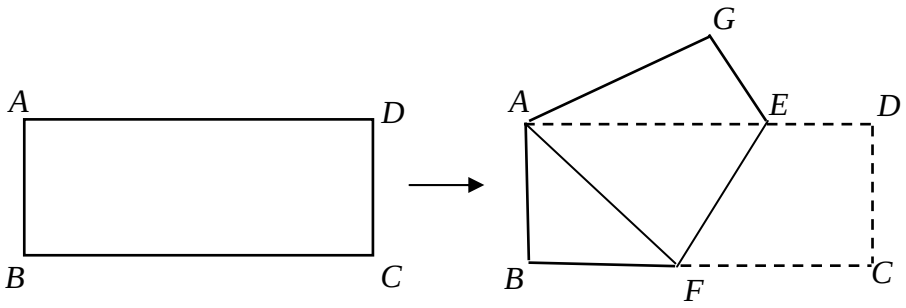
香港青少年數學精英選拔賽
The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest
2013 – 2014

甲部 (每題 2 分)
把答案填在答題紙所提供的位置。

1 三角形 ABC 中，M 為 BC 的中點。若 $AB = 6$、$AM = 5$、$AC = 8$，求三角形 ABC 的面積。

In triangle ABC, M is the mid point of BC. If $AB = 6$, $AM = 5$, $AC = 8$, find the area of triangle ABC .

2 如圖，把一長方形薄紙 $ABCD$ 沿 EF 折疊，使點 C 與點 A 重合。
若$\angle DEF = 123°$，求$\angle BAF$ 的度數。



In the figure, a rectangle $ABCD$ is folded along EF , such that C coincides with A.
If $\angle DEF = 123°$, find $\angle BAF$ in degrees.

3 已知 $x^3 + x + 1 = 0$ ，求 $\dfrac{1}{(1+x^2)^2} + \dfrac{1}{x}$ 的值。

It is given that $x^3 + x + 1 = 0$. Find the value of $\dfrac{1}{(1+x^2)^2} + \dfrac{1}{x}$.

4 10 800 的所有正因數中，有多少個能被 6 整除？
How many positive factors of 10 800 are divisible by 6?

5 設 $a_1 = 1$、$a_2 = 2$ 及對所有正整數 n，$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$。
求 $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2014}$ 的值。

Let $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ and $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ for all positive integers n.
Find the value of $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2014}$.

6 已知 $2^{10} + 5^{12}$ 為兩個質數 p 及 q 的積，其中 $p > q$。求 $p - q$ 的值。

It is given that $2^{10} + 5^{12}$ is a product of two prime numbers p and q, where $p > q$. Find the value of $p - q$.

7 已知 x 為一個整數，且 $x^3 - x^2 - x^1 - x^0 = 2014$。求 x 的值。

It is given that x is an integer and $x^3 - x^2 - x^1 - x^0 = 2014$. Find the value of x.

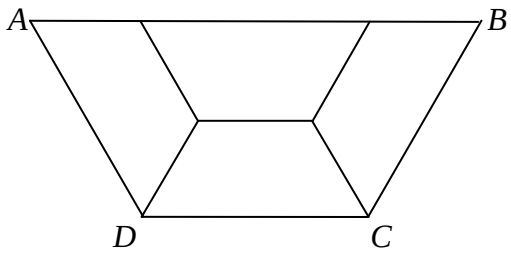
8 若 $0 \le x \le 90$，$0 \le y \le 90$ 及 $(0.5 + \sin x°)^{2014} = \sin y°$ ，求 $x + y$ 的最大可取值。

If $0 \le x \le 90$, $0 \le y \le 90$ and $(0.5 + \sin x°)^{2014} = \sin y°$, find the greatest possible value of $x + y$.

9 若三角形的邊長為 x、 $20 - x$ 及 18，其中 x 為正整數，求可畫出多少個大小不同的三角形。

If the lengths of three sides of a triangle are x, $20 - x$ and 18, where x is a positive integer. Find the number of possible distinct triangles that can be drawn.

10 在圖中，等腰梯形 *ABCD* 是由四個大小相同而較小的等腰梯形所組成。
若 *ABCD* 的周界為 20 cm，求 *ABCD* 的面積。



In the figure, isosceles trapezium *ABCD* is formed by four identical smaller isosceles trapeziums. If the perimeter of *ABCD* is 20 cm, find the area of *ABCD*.

11 已知 a, b 為整數，及 $(ab)^2 + (a + b)^2 = 1$。有多少組 (a, b) 能滿足以上條件？

It is given that a, b are integers and $(ab)^2 + (a + b)^2 = 1$. How many pairs (a, b) can satisfy the above conditions.

12 解 $\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\frac{x}{1+2+3+4}.....+\frac{x}{1+2+3+...+2012+2013}=\frac{1}{2014}$ 。

Solve $\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\frac{x}{1+2+3+4}.....+\frac{x}{1+2+3+...+2012+2013}=\frac{1}{2014}$.

13 已知 m，n 為質數，且 $5m + 7n = 129$，求 $m + n$ 的所有可能值。

It is given that m, n are prime and $5m + 7n = 129$, find all the possible values of $m + n$.

14 由 1 至 1111 的整數，其中最少有 1 個零的數有多少個？

Among the integers 1 to 1111, how many of them have at least one zero?

15 若 $\underbrace{2014\ 2014\ldots\ldots2014}_{N\text{ 個 }2014}125$ 能被 15 整除，且 $N < 2014$。求 N 的最大值。

If $\underbrace{2014\ 2014\ldots\ldots2014}_{N\text{ times}2014}125$ is divisible by 15，and $N < 2014$。Find the largest value of N.

16 點 P 在正方形 $ABCD$ 內，使得三角形 PAB、PBC、PCD、PDA 的面積分別為 $c + 4$、$2c + 4$、$3c + 2$、$4c – 4$ ，其中 c 為一常數。求正方形 $ABCD$ 的邊長。

P is a point inside square $ABCD$ such that the areas of triangles PAB, PBC, PCD and PDA are $c + 4$、$2c + 4$、$3c + 2$、$4c – 4$ respectively, where c is a constant. Find the side length of square $ABCD$.

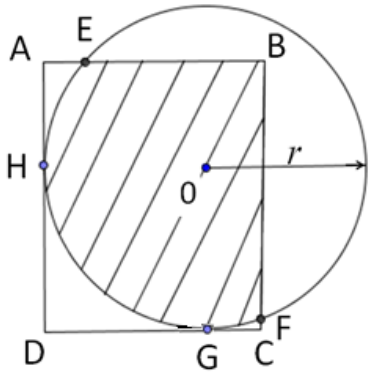
17 (a) 四個半徑均為 1 cm 的圓形，放在一個邊長 4 cm 的正方形內的四個角，每個圓形均與正方形的兩鄰邊及其他兩個圓形互切。求與這四個圓形互切的小圓的半徑。

(b) 八個半徑均為 1 cm 的球體，放在一個邊長 4 cm 的正方體內的八個角，每個球體均與正方體的三鄰面及其他三個球體互切。求與這八個球體互切的小球體的半徑。

(a) Four circles, each of radius 1 cm, are placed at the four corners of a square with side of length 4 cm. Each circle touches two adjacent sides of the square and two other circles. Find the radius of the smaller circle that touches all four circles.

(b) Eight spheres, each of radius 1 cm, are placed at the eight corners of a cube with side of length 4 cm. Each sphere touches three adjacent faces of the cube and three other spheres. Find the radius of the smaller sphere that touches all eight spheres.

18 設 *ABCD* 為長方形，其中 *AD* = *a* cm 及 *CD* = *b* cm。現把這個長方形放在一個圓心為 *O* 及半徑為 *r* cm 的圓形之上，使得 *AD* 及 *CD* 分別切圓於 *H* 及 *G*。若 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$、 $b=\frac{3}{2}$ 及 *r* = 1，求重疊部分的面積。



Let *ABCD* be a rectangle where *AD* = *a* cm and *CD* = *b* cm. Now put the rectangle *ABCD* above a circle with center at *O* and radius *r* cm in such a way that *AD* and *CD* are tangent to the circle at *H* and *G* respectively. If $a=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$, $b=\frac{3}{2}$ and *r* = 1, find the area of the overlapped region .

乙部 **(每題 6 分)**

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

19 2014 為一個四位偶數，其四位數字之和及積分別為 7 及 0。

(a) 共有多少個這樣的四位偶數 (在 1000 至 9999 間)呢？

(b) 在(a) 所描述的所有四位偶數的總和是多少？

2014 is an even four-digit number for which the sum and product of the digits are 7 and 0 respectively.

(a) How many such even four-digit numbers (between 1000 and 9999) are there?

(b) What is the sum of all the even four-digit numbers described in (a)?

20 設 n 為一個大於或等於 40 的偶數。
若一個合成數是一個奇數，該數被稱為奇合數。
(a) 找出一個兩個位數 n，並以四種不同的方法把它表成兩個奇合數之和?
(b) 證明 n 必定可表成兩個奇合數之和。

Let n be an even integer greater than or equal to 40.
If a composite number is odd, it is called an odd composite number.
(a) Find a two-digit number n which can be expressed as a sum of two odd composite numbers in four different ways.
(b) Show that n can always be expressed as a sum of two odd composite numbers.

21 如圖所示是一個 3×3 的幻方，每行數字的和、每列數字的和及對角線數字的和都相等。
(a) 求 M 的值。
(b) 若 $d = 15$，完成該幻方。

a	M	b
c	d	14
20	e	f

The figure shows a 3×3 Magic Square such that the sum of the numbers in each row, each column and each diagonals are all equal.
(a) Find the value of M.
(b) If $d = 15$, complete the Magic Square.

~ End of paper 全卷完 ~

擬題委員會：蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、
馮德華老師、徐崑玉老師、鄭永權老師、潘維凱老師