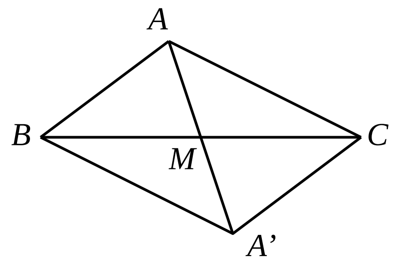
香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

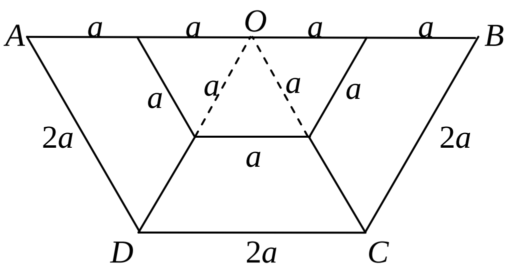
2013 – 2014

建議題解

甲部 **(每題 2 分)**

1	【24】  以 M 為心旋轉三角形 ABC 180^{o} 至三角形 $A'CB$。 AMA'為直線且長度為 $2AM = 10$。 另外 $BA' = AC = 8$。故 $AA'^2 = 10^2 = 100 = 36 + 64 = AB^2 + BA'^2$。 所以 $ABA' = 90^{o}$，亦即 $ABA'C$ 為長方形。 因此，三角形 ABC 的面積 = 1/2 長方形 $ABA'C$ 的面積 = 三角形 ABA' 的面積 = $(BA)(BA')/2 = 24$
2	【24°】 已知$\angle DEF = 123°$，$\therefore \angle CFE = 57°$ $\angle AF\acute{E} = \angle CFE = 57°$ $\angle FAE = 123° - \angle AFE = 123° - 57° = 66°$ 因此，$\angle BAF = 90° - \angle FAE = 90° - 66° = 24°$
3	【−1】 $x^3 + x + 1 = 0$，$x^2 + 1 + \frac{1}{x} = 0$，$x^2 + 1 = -\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x^2+1} = -x$ 及 $x^3 + 1 = -x$。 因此，$\frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x} = (-x)^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3+1}{x} = \frac{-x}{x} = -1$。
4	【36】 $10\ 800 = 2^4 3^3 5^2$，$6 = 2^1 3^1$。能被 6 整除的正因數必為 $2^a 3^b 5^c$，而且 a = 1、 2、3 或 4，b = 1、2 或 3，c = 0、1 或 2。 因此，其總數為(4)(3)(3)=36 個。

5	【3】 $\{a_n\} = \{1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, \ldots\}$ 六次循環，而且六個連續項之和為零。故 $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2010} = 0$。 因此，$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2014} = a_{2011} + a_{2012} + a_{2013} + a_{2014}$ $= 1 + 2 + 1 + (-1) = 3$
6	【2000】 $pq = 2^{10} + 5^{12}$ $= (2^5 + 5^6)^2 - 2(2^5)(5^6)$ $= (2^5 + 5^6)^2 - 10^6$ $= (2^5 + 5^6 + 10^3)(2^5 + 5^6 - 10^3)$ $= (2^5 + 5^6 + 1000)(2^5 + 5^6 - 1000)$ p 及 q 為質數，且 $p > q$， 因此， $p = 2^5 + 5^6 + 1000$ $q = 2^5 + 5^6 - 1000$ $p - q = 2000$
7	【13】 考慮 $12^3 = 1728 < 2014$，$13^3 = 2197 > 2014$ 及 $14^3 = 2744 > 2014$， 經試驗，得 $13^3 - 13^2 - 13 - 1 = 2014$。
8	【120】 $\sin y° \leq 1$ $\therefore (0.5 + \sin x°)^{2014} \leq 1$ $0.5 + \sin x° \leq 1$ $\sin x° \leq 0.5$ $0 \leq x \leq 30$ 當 $x + y$ 最大，$x = 30$，$y = 90$ 因此，$x + y$ 的最大可取值 $= 30 + 90 = 120$

9	【9】 根據三角形不等式， $\begin{cases} x+20-x>18 \\ x+18>20-x \\ 20-x+18>x \end{cases}$ ， 即 $\begin{cases} 20>18 \\ x>1 \\ x<19 \end{cases}$ $\therefore 1<x<19$ 由於 x 為正整數， $\therefore \quad 2 \le x \le 18$ 當 $x = 2$，$(x, 20 - x) = (2,18)$; 當 $x = 18$，$(x, 20 - x) = (18,2)$ 。這兩情況會畫出相同大小的三角形。 只有當 $2 \le x \le 10$，可畫出所有不同的三角形， 因此，可畫出 9 個大小不同的三角形。
10	【$12\sqrt{3}$ cm^2】  設 $CD = 2a$ cm，則 $AD = BC = 2a$ cm 根據相似圖形，可求出如圖所示的各邊長。 $\therefore \quad 4a + 2a + 2a + 2a = 20$ $a = 2$ 因此，$ABCD$ 的面積 $= 3 \times \Delta OAD$ 的面積 $= 3 \times \frac{1}{2}(4)(4 \sin 60°)$ cm^2 $= 12\sqrt{3}$ cm^2
11	【6】 因 $(ab)^2 \ge 0$ 及 $(a+b)^2 \ge 0$ ， 所以得 $\begin{cases} ab=0 \\ a+b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} ab=0 \\ a+b=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} ab=-1 \\ a+b=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} ab=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ 因此， $(a,b)=(0,1)$ 或 $(1,0)$ 或 $(a,b)=(0,-1)$ 或 $(-1,0)$ 或 $(a,b)=(1,-1)$ 或 $(-1,1)$ ，共 6 對。

12	【$\frac{1}{2012}$】 $\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\frac{x}{1+2+3+4}......+\frac{x}{1+2+3+...+2012+2013}=\frac{1}{2014}$ $\frac{x}{\frac{2(1+2)}{2}}+\frac{x}{\frac{3(1+3)}{2}}+\frac{x}{\frac{4(1+4)}{2}}......+\frac{x}{\frac{2013(1+2013)}{2}}=\frac{1}{2014}$ $2x[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+......+(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014})]=\frac{1}{2014}$ $2x(\frac{1}{2}-\frac{1}{2014})=\frac{1}{2014}$ $x=\frac{1}{2012}$
13	【19, 25】 $5m$，$7n$ 其中必有一個是奇數，另一個是偶數。 若 m=2，n=17 若 n =2，m=23 因此， $m + n$ = 19 或 25
14	【291】 由 1 至 1111 沒有”0”的一位數共有 9 個 沒有”0”的二位數共有 9×9 = 81 個 沒有”0”的三位數共 9×9×9 = 729 個 沒有”0”的四位數只有一個 因此，由 1 至 1111 最少有一個零的數有 1111– (9+81+729+1)=291 個
15	【2011】 2014 2014…… 2014125 必然是 5 的倍數，若此數能被 15 整除，它的各位數字和 (2+0+1+4)N+1+2+5，即 7N+8 是 3 的倍數， 所以$\frac{7N+8}{3}=\frac{N+2}{3}+2N+2$ 為整數，(N + 2) 能被 3 整除， 因此，N 的最大值是 2011。
16	【6】 三角形 PAB 及 PCD 的面積和 = 三角形 PBC 及 PDA 的面積和(=半正方面積)，因此 (c + 4) + (3c + 2) =(2c + 4) + (4c – 4)，c = 3。 所以正方形 $ABCD$ 的面積= (3+ 4) + (2(3) + 4) + (3(3) + 2) + (4(3) – 4)= 36 ， 因此，邊長為 6。

17	【(a) $(\sqrt{2}-1)\,\text{cm}$ (b) $(\sqrt{3}-1)\,\text{cm}$ 】 注意小圓(對應小球體) 的圓心和每角的距離為 $2\sqrt{2}$ cm (對應 $2\sqrt{3}$ cm) ， 而各圓 (對應球體) 的圓心和其最接近的角的距離為 $\sqrt{2}$ cm (對應 $\sqrt{3}$ cm) 。因此若 r cm 為小圓 (對應小球體) 的半徑的，我們可得出 $r+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (對應 $r+1+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$)， 因此 $r=\sqrt{2}-1$ (對應 $r=\sqrt{3}-1$)。
18	【 $(\frac{1}{2}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2})\,\text{cm}^2$】 $AH=(a-r)$ cm $GC=(b-r)$ cm 設 $\angle EOH=\theta$ 及 $\angle FOH=\phi$，則扇形 $OEHGF$ 的面積 $=\dfrac{\theta+\phi+90^\circ}{360^\circ}\pi r^2$ $\sin\theta=\dfrac{a-r}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad\therefore\theta=60^\circ\quad\therefore\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $\sin\phi=\dfrac{b-r}{r}=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\phi=30^\circ\quad\therefore\cos\phi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 設 I 為 AB 上的一點，使得 IOG 平行於 AHD， 設 J 為 BC 上的一點，使得 HOJ 平行於 DGC。 長方形 $OIBJ$ 的面積 $=(a-r)(b-r)\,\text{cm}^2$ ΔOIE 的面積$=\dfrac{1}{2}(a-r)r\cos\theta\ \ \text{cm}^2$ ΔOJE 的面積$=\dfrac{1}{2}(b-r)r\cos\phi\ \ \text{cm}^2$ 重疊部分面積 ΔOIE 的面積 $=\dfrac{\theta+\phi+90^\circ}{360^\circ}\pi r^2+\dfrac{1}{2}(a-r)r\cos\theta+\dfrac{1}{2}(b-r)r\cos\phi+(a-r)(b-r)$ $=\dfrac{1}{2}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=(\dfrac{1}{2}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2})\,\text{cm}^2$
	另解： $\sin\theta=\dfrac{a-r}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad\therefore\theta=60^\circ$ $\sin\phi=\dfrac{b-r}{r}=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\phi=30^\circ$ $\therefore$ EOF 為圓的直徑。由於 EBF 為直角，B 必在圓周之上。 半圓 $OEHGF$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\pi\ \text{cm}^2$，直角三角形 EBF 的面積 $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \ \text{cm}^2$ 因此，重疊部分面積 $=(\dfrac{1}{2}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2})\,\text{cm}^2$

乙部 **(每題 6 分)**

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

19 【(a) 43 (b) 126 634 】

(a) 首先注意最後一個數字只可以為 0，2，4 或 6。

情況一：最後一個數字 = 0

第一個數字可以是 1，而其餘兩個數字之和是 6，共 7 個數；

第一個數字可以是 2，而其餘兩個數字之和是 5，共 6 個數；

第一個數字可以是 3，而其餘兩個數字之和是 4，共 5 個數；

第一個數字可以是 4，而其餘兩個數字之和是 3，共 4 個數；

第一個數字可以是 5，而其餘兩個數字之和是 2，共 3 個數；

第一個數字可以是 6，而其餘兩個數字之和是 1，共 2 個數；

第一個數字可以是 7，而其餘兩個數字之和是 0，共 1 個數。

情況二：最後一個數字 = 2，因其餘數字必定有 0，所以

第二及第三第個數字為 0 及 0，則第一個數字為 5，共 1 個數；

只有第二個數字數為 0，其餘數字之和為 5，共 4 個數；

只有第三數字數為 0，其餘數字之和為 5，共 4 個數。

情況三：最後一個數字 = 4，因其餘數字必定有 0，所以

第二及第三第個數字為 0 及 0，則第一個數字為 3，共 1 個數；

只有第二數字數為 0，其餘數字之和為 3，共 2 個數；

只有第三數字數為 0，其餘數字之和為 3，共 2 個數。

情況四：最後一個數字 = 6，只有一個數 1006。

因此，共有 $(7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) + (1 + 4 + 4) + (1 + 2 + 2) + 1 = 43$ 個數。

(b) 總和

$$[(1\times7+2\times6+3\times5+4\times4+5\times3+6\times2+7) + (1+2+3+4)\times2 + 5 + (1+2)\times2 + 3 + 1] \times 1000 + [\frac{1}{2}(6\times7+5\times6+4\times5+3\times4+2\times3+1\times2) + (1+2+3+4) + (1+2)] \times 110 + 2\times9 + 4\times5 + 6$$

$$= 119 \times 1000 + 69 \times 110 + 44$$

$$= 126\ 634$$

20 【(a) 70】

(a) 70 = 15 + 55 = 25 + 45 = 35 + 35 = 21 + 49

(b) 因為 15，25 及 35 除以 3 時的餘數分別是 0，1 及 2。

當 $n-15$， $n-25$ 及 $n-35$ 分別除以 3 ，餘數會是 0，1 及 2，

所以 $n-15$， $n-25$ 及 $n-35$ 中必有一個能被 3 整除，

因此為合數 (由為這三個數均大於 3) 。

由於 n 為偶數，且 $n = (n-15) + 15 = (n-25) + 25 = (n-35) + 35$，

因此， n 必定可表成兩個奇合數之和。

21 (a) $c+d+14=20+d+b$

$\therefore c=b+6$

$a+M+b=a+c+20$

$\therefore M+b=c+20$

$\therefore M+b=b+6+20$

$\therefore M=26$

a	*M*	*b*
c	*d*	*14*
20	*e*	*f*

(b) $26+15+e=20+e+f$

$\therefore f=21$

$b+14+21=a+26+b$

$\therefore a=9$

每行數字之和$=a+15+21=9+15+21=45$

$a+c+20=9+c+20=45$

$\therefore c=16$

$b+14+f=b+14+21=45$

$\therefore b=10$

$20+e+f=20+e+21=45$

$\therefore e=4$

a	*26*	*b*
c	*15*	*14*
20	*e*	*f*

9	*26*	*10*
16	*15*	*14*
20	*4*	*21*

~ End 完 ~

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、吳端偉助理教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、
馮德華老師、徐崑玉老師、鄭永權老師、潘維凱老師