香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2014 – 2015 建議題解

甲部 (每題 2 分) 把答案填在答題紙所提供的位置。

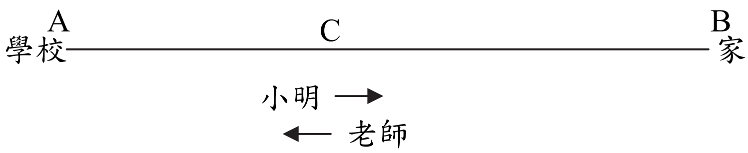
1 【4029】

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2015+2014}{2015-2014}=4029$$

2 【–2015】

	2015 = (–5) × (–13) × 31	(–5) + (–13) + 31 = 13
	2015 = (–5) ×13 × (–31)	(–5) +13 + (–31) =–5
	2015 = 5 × (–13) × (–31)	5 + (–13) + (–31) = –39
	2015 = (–1) × (–65) × 31	(–1) + (–65) + 31 = –35
	2015 = (–1) × 65 × (–31)	(–1) + 65 + (–31) = 33
	2015 = 1 × (–65) × (–31)	1 + (–65) + (–31) = –95
	2015 = (–1) × (–5) × 403	(–1) + (–5) + 403 = 397
	2015 = (–1) ×5 × (–403)	(–1) +5 + (–403) = –399
	2015 = 1 ×(–5) × (–403)	1 +(–5) + (–403) = –407
	2015 = (–1) × (–13) × 155	(–1) + (–13) + 155 = 141
	2015 = (–1) × 13 × (–155)	(–1) + 13 + (–155) = –143
	2015 = 1 × (–13) × (–155)	1 + (–13) + (–155) = –167
	2015 = (–1) × (–1) × 2015	(–1) + (–1) + 2015 = 2013
	2015 = (–1) ×1 × (–2015)	(–1) +1 + (–2015) = –2015
	2015 = 1 × (–1) × (–2015)	1 + (–1) + (–2015) = –2015

3 【120 分鐘】



小明用了 30 分鐘從相遇點 C 回到家中，即老師用 30 分鐘從相遇點 C 回到學校，所以小明亦須用 90 分鐘從學校到相遇點 C。

因此，小明由學校步行回家需用時間 120 分鐘。

4 【13】

$$44<\sqrt{2015}<45$$

$$168<124+\sqrt{2015}<169$$

$$12<\sqrt{124+\sqrt{2015}}<13$$

5	【1】 $31^x=2015$ 及 $65^y=2015$ $31^{xy}=2015^y$ 及 $65^{xy}=2015^x$， $(31\times65)^{xy}=2015^{x+y}$， $xy=x+y$ $\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=1$
6	【1717】 首 99 名學生分得 $(1+2+3+\ldots+32+33)\times3=\frac{33(1+33)}{2}\times3=1683$ 第 100 名學生分得 34 本書。 因此，x 的最小值$=1683+34=1717$
7	【382】 若小立體只有一面著了色，則該立方體須在長方體的其中一面上卻不在邊上。長方體有兩塊 9×10 的面，兩塊 9×11 的面和兩塊 10×11 的面。 在其面上卻不在邊上的小立體分別有$(9-2)(10-2)$、$(9-2)(11-2)$及 $(10-2)(11-2)$ 個。因此，該種小立體共有 $2\times7\times8+2\times7\times9+2\times8\times9=382$ 個。
8	【$AP=0.3$】 設 $AP=CQ=m$ 及 $PB=DQ=n$, 則 $PY:YC=n:m$. $[PXQY]=2[PQY]=2(\frac{n}{m+n})[PQC]=2\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n}[PDC]=\frac{mn}{(m+n)^2}$ $\because n+m=1$、 $nm=0.21$ $\therefore (n-m)^2=(n+m)^2-4mn=0.16$ $\because n>m,\quad n-m=0.4$ 得 $n=0.7$ 及 $m=0.3$ 因此，$AP=m=0.3$ (註：$[PXQY]=PXQY$ 的面積)
9	【840】 設兩對角線分別長 $2x$ 及 $2x+2$。因該兩對角線互相垂直平分，故菱形被劃分成四個全等而斜邊為 29 的直角三角形。故菱形的面積為 $4\times\frac{1}{2}x(x+1)=2x(x+1)=2x^2+2x$ 。 最後由畢氏定理有 $x^2+(x+1)^2=29^2=841$，從而 $2x^2+2x=840$ 。

10	【$(\frac{25\sqrt{3}}{4}-6)$】 以 C 為中心逆時針方向旋轉 ABC 至 $A'DC$，得 等邊三角形 ACA'，其邊長為 5，又 $\Delta ADA'$ 的邊長分別為 3，4 及 5，則 $\Delta ADA'$ 為一個直角三角形。因此，所需面積等於 $[ACA'] - [ADA']$，即 $\frac{25\sqrt{3}}{4}-6$。
11	【3022】 設該 2015 個連續正整數為 a、$a+1$、$a+2$、…、$a+2013$、$a+2014$。 若 $\frac{(a+a+2014)\times 2015}{2}=(a+1007)\times 2015$ 為一個完全平方數， 則 $a+1007=2015N^2$， 當 $N=1$， $a+1007=2015$， $a=1008$ 因此，x 的最小值 $=1008+2014=3022$。
12	【2014】 $\sqrt{1+2015\sqrt{1+2014\sqrt{1+2013\sqrt{1+2012\sqrt{1+2011\times 2009}}}}}$ $=\sqrt{1+2015\sqrt{1+2014\sqrt{1+2013\sqrt{1+2012\times 2010}}}}$ $=\sqrt{1+2015\sqrt{1+2014\sqrt{1+2013\times 2011}}}$ $=\sqrt{1+2015\sqrt{1+2014\times 2012}}$ $=\sqrt{1+2015\times 2013}$ $=2014$
13	【$\frac{1}{8}$】 $\frac{a}{a^2+a+1}=\frac{1}{4}$ $\frac{a^2+a+1}{a}=4$ $a+1+\frac{1}{a}=4$ $a+\frac{1}{a}=3$ $(a+\frac{1}{a})^2=9$

$$a^2+2+\frac{1}{a^2}=9$$

$$a^2+1+\frac{1}{a^2}=8$$

$$\frac{\mathrm{a}^4+\mathrm{a}^2+1}{\mathrm{a}^2}=8$$

因此，$\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^4+\mathrm{a}^2+1}=\frac{1}{8}$

14 【770】

因 $96=2^5\times3^1$ 及 $180=2^2\times3^2\times5^1$，所以 96 與 180 的最大公因數為 $12=2^2\times3^1$。

96 的所有因子的和為 $(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)(3^0+3^1)=63\times4=252$。

180 的所有因子的和為 $(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1)=7\times13\times6=546$。

所有既是 96 也是 180 的因子的和等於 12 的所有因子的和，

即$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)=7\times4=28$。

因此，所求的和為 $252+546-28=770$。

15 【128】

假設其中 4 個相鄰的方格內的數字從左到右分別為 a、b、c 及 d。

則 $a+b+c=2015$ 及 $b+c+d=2015$，所以 $a=d$。

換句話說，方格內的數字每隔 2 個格後重複如下圖：

a	b	999	a	b	c	a	888	c

從而得 $b=888$ 及 $c=999$。因為 $a+b+c=2015$，因此，$a=128$。

16 【50】

注意有 $AB=10$ 及 $BC=10\sqrt{3}$。

設以 A、B 及 C 為圓心的圓的半徑分別為 a、b 及 c。則 $a+c=20$、$a+b=10$ 及 $b+c=10\sqrt{3}$。

解聯立方程得 $a=15-5\sqrt{3}$、$b=5\sqrt{3}-5$、$c=5+5\sqrt{3}$。

三個扇形的面積和

$$=\frac{\pi(5\sqrt{3}-5)^2}{4}+\frac{\pi(15-5\sqrt{3})^2}{6}+\frac{\pi(5+5\sqrt{3})^2}{12}=\frac{(250-100\sqrt{3})\pi}{3}$$ 。

因此，$m+n=\frac{250}{3}-\frac{100}{3}=50$。

17	【5】 一個短(及"取巧") 的方法是考慮一個**簡單的特例**，例如正方形，這**假設**了答案是與凸四邊形的形狀無關(否則題目為何會這樣問)。 若原四邊形為正方形，面積為 1，則放大後的四邊形很明顯也是正方形，因此，面積為 5。 放大後的四邊形面積為原四邊形面積的五倍，這個結果對**一般**的情況也是正確的。以對角線 BD 把 $ABCD$ 分成兩個三角形，設 ΔABD 及 ΔCBD 的面積分別為 a 及 b 。以對角線 AC 把 $ABCD$ 分成兩個三角形，設 ΔABC 及 ΔADC 的面積分別為 c 及 d。繪劃 AD', BA', CB', DC' 後，我們可看出 $A'B'C'D'$ 的面積等於 $(2a+2b)+(2c+2d)+S$，其中 $S=a+b=c+d$ 為 $ABCD$ 的面積。因此，$A'B'C'D'$ 的面積等於 $2S+2S+S=5S$。
18	【$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$】 $(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1$ $\Rightarrow \sqrt{1+y^2}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}-y$ $\Rightarrow 1+y^2=(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}})^2-\frac{2y}{x+\sqrt{1+x^2}}+y^2$ $\Rightarrow (x+\sqrt{1+x^2})^2=1-2y(x+\sqrt{1+x^2})$ $\Rightarrow 2x^2+2x\sqrt{1+x^2}=-2y(x+\sqrt{1+x^2})$ $\Rightarrow x=-y$ $\therefore 2y^2=1$ 因此，我們得出 ，並能得出只得兩點相交點： $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

乙部 (每題 6 分)

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

19

【(a) 2 場 (b) 2015 場】

(a) A1 勝 B1， A1 勝 C1，B2 勝 A1，C2 勝 B2，C2 勝 A2。

因此，C 隊成為冠軍，勝出共 2 場。

(b) A1 依次勝 B1、C1、B2、C2、…、B2014、C2014 、B2015，

跟著，C2015 依次勝 A 隊的 2015 人後，C 隊成為冠軍。C 隊共勝 2015 場。

20

k \ N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	4	4	5	4	5	4	5	5	5	5	5	5	5
4	4	6	5	6	6	7	6	7	6	7	6	7	7	7
5	5	7	6	8	7	8	8	9	8	9	8	9	8	9
6	6	9	8	10	9	10	9	10	10	11	10	11	10	11

其實在一般情況下，

當 N 為偶數，最大可能候選人的數目為 $\dfrac{2kN}{N+2}$ 的整數部分；

當 N 為奇數，最大可能候選人的數目 $\dfrac{2kN}{N+1}$ 的整數部分 $(N \ge 2, k \ge 1)$。

考慮其中兩個例子：

(1) 當 $N = 10, k = 6$

由於 N 為偶數，候選人必須得到最少 6 (= $N/2 + 1$) 名委員提名，

候選人的數目 ≤ 10，所以答案為 10。

(2) 當 $N = 11, k = 5$

由於 N 為奇數，候選人必須得到最少 6(= $(N+1)/2$)名委員提名，

候選人的數目 $\le \dfrac{55}{6} = 9$，所以答案為 9。

再考慮一般情況：

(1) 當 N 為偶數，候選人必須得到最少 $N/2 + 1$ 名委員提名，

	候選人的數目 $\le \dfrac{Nk}{(\frac{N}{2}+1)} = \dfrac{2kN}{N+2}$ ，所以答案為 $\dfrac{2kN}{N+2}$ 的整數部分。 (2) 當 N 為奇數，候選人必須得到最少 $(N+1)/2$ 名委員提名， 候選人的數目 $\le \dfrac{Nk}{(\frac{N+1}{2})} = \dfrac{2kN}{N+1}$ ，所以答案為 $\dfrac{2kN}{N+1}$ 的整數部分。
21	(a) 設 $M = y + 1 + y^2$， 則 $(x+1+x^2)(y+1+y^2)=1$ 會化簡為 $x + 1 - 1/M + x^2 = 0$ ， 由於 x 必須為實數，利用方程的判別式，可得出 $1 - 4\,(1 - 1/M) \ge 0$ 。 因此， $4/3 \ge M = y + 1 + y^2 = (y + 1/2)^2 + 3/4$ ，得 $(y + 1/2)^2 \le 7/12$ 當 $y = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} - \dfrac{1}{2}$ ，得出 $M = 4/3$ 及 $x + 1/4 + x^2 = 0$， 所以 $x = -1/2$，所求的點為 $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} - \dfrac{1}{2})$ 。 (b) 由於 $(x+1+x^2)(y+1+y^2)=1$ 是對稱於 $x=y$ (即若 x 及 y 互換，方程不變)，利用(a)的相同方法， 當 $x = -\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} - \dfrac{1}{2}$ ，得出 $y + 1/4 + y^2 = 0$ ，所以 $y = -1/2$ ， 所求的點為 $(-\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} - \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$ 。 (c) 利用 (a) 及 (b) 所得出的結果，可得出 對於 C 上的任何點 (x, y) ，$\lvert x\rvert, \lvert y\rvert \le \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} + \dfrac{1}{2}$ 。 由於沒有點 (x, y) 在 C 上會出現 (x, y) ，所以 對於 C 上的任何點 (x, y)， $x^2 + y^2 < 2(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} + \dfrac{1}{2})^2$ ， 因此取 $r = \sqrt{2(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} + \dfrac{1}{2})^2}$ 。

~ 全卷完 End of paper ~

擬題委員會：蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、
馮德華老師、徐崑玉老師、鄭永權老師、潘維凱老師