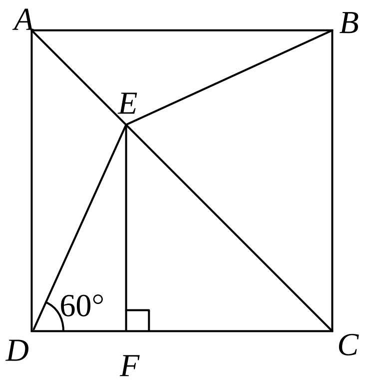
香港青少年數學精英選拔賽
The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest
2012 – 2013
建議題解

甲部 **(每題 2 分)**

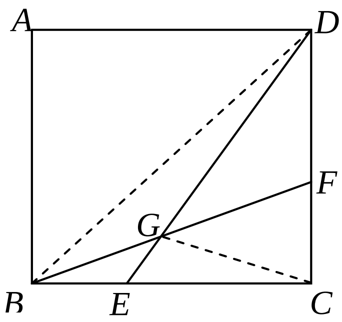
把答案填在答題紙所提供的位置。

1	【16】 在 AB 上作點 F 使得 $EF \perp AB$， $\therefore \Delta ADE$ 的面積 $= \Delta ADF$ 的面積 $= \frac{1}{4} \times 64$ $= 16$
2	【30】 有 $\frac{5 \times 12}{2} = 30$ 條棱。
3	【38664】 共有 $3\times3\times2\times1 = 18$ 個 4 位數。 其中在個位：’0’出現 6 次，’1’出現 4 次，’2’出現 4 次，’3’出現 4 次 在十位：’0’出現 6 次，’1’出現 4 次，’2’出現 4 次，’3’出現 4 次 在百位：’0’出現 6 次，’1’出現 4 次，’2’出現 4 次，’3’出現 4 次 在千位：’1’出現 6 次，’2’出現 6 次，’3’出現 6 次 $1\times4+2\times4+3\times4=24$ 及 $1\times6+2\times6+3\times6=36$ 總和 $=24+24\times10+24\times100+36\times1000$ $=38664$
4.	【$\frac{1}{2}$】 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+a_n}{a_n} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$ $\frac{1}{a_{2012}} = 2013 \Rightarrow \frac{1}{a_{2011}} = 2012$ 由此可得 $\frac{1}{a_1} = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$。
5.	【$a = 61, b = 2, c = 8$】 考慮 $ab^bc + a = 2013$， $a(b^bc+1) = 2013 = 3\times11\times61$ (1) 當 a =3 $3(b^bc+1) = 2013$， $b^bc+1 = 671$， $b^bc = 670 = 2\times5\times67$ (捨去) (2) 當 a =11 $11(b^bc+1) = 2013$， $b^bc+1 = 183$， $b^bc = 182 = 2\times91$ (捨去)

	(3) 當 $a=61$ $61(b^b c+1)=2013$，$b^b c+1=33$，$b^b c=32=2^2\times 8$，得 $a=61$、$b=2$ 及 $c=8$。
6.	【50】 設ΔOAB 的面積 $=x$ 及 ΔOCD 的面積 $=y$。 $\frac{8}{x}=\frac{OD}{OB}=\frac{y}{18}$ $xy=144$ 當兩數的積固定時，兩數愈接近時，兩數的和就會愈小。 所以，當 $x=y=12$ 時，$x+y$ 的最小值為 $12+12=24$。 因此，M 的最小值為 $8+18+24=50$。
7.	【$3^4\times 11^2\times 61^2$】 $2013=3\times 11\times 61$ 被 3 整除的正因子包括 3、3×11 、 3×61 及 $3\times 11\times 61$ 所有α 不同可能值的積 $=3\times(3\times 11)\times(3\times 61)\times(3\times 11\times 61)$ $=3^4\times 11^2\times 61^2$
8.	【23】 因 $2013=1\times 3\times 11\times 61$， 不失一般性，得 $\begin{cases} m-a=1 \\ m-b=3 \\ m-c=11 \\ m-d=61 \end{cases}$， $\therefore 4m-(a+b+c+d)=76$ 因此，$m=23$。
9.	【$\frac{1}{\sqrt{3}}$】  連接 $EF\perp DC$ (如圖) 因 $\angle EDC=60°$，得 $DE:EF:DF=2:\sqrt{3}:1$ 因 $\angle ACD=45°$，得 $EF=FC$ $\therefore \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta BEC}}=\frac{DF}{FC}=\frac{DF}{EF}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

10 【$\frac{9}{14}$】

如圖，聯結 BD 及 CG。



ΔBGD 的面積 : ΔBGC 的面積 $= 2 : 1$

ΔCGD 的面積 : ΔBGD 的面積 $= 2 : 1$

設 ΔBGC 的面積 $= x$，則

ΔBGD 的面積 $= 2x$，ΔCGD 的面積 $= 4x$。

ΔABD 的面積 $= \Delta BDC$ 的面積 $= 2x + 4x + x = 7x$。

$$\frac{ABGD\text{的面積}}{ABCD\text{的面積}} = \frac{7x+2x}{7x+7x} = \frac{9}{14}$$ 。

11. 【16】

將方程寫成 $mn - 3m - 5n = 0$

$$mn - 3m - 5n + 15 = 15$$

$$(m-5)(n-3) = 15$$

因 $m - 5 > -5$，$n - 3 > -3$

則 $\begin{cases} m-5=15 \\ n-3=1 \end{cases}$，$\begin{cases} m-5=5 \\ n-3=3 \end{cases}$，$\begin{cases} m-5=3 \\ n-3=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m-5=1 \\ n-3=15 \end{cases}$

故 $\begin{cases} m=20 \\ n=4 \end{cases}$，$\begin{cases} m=10 \\ n=6 \end{cases}$，$\begin{cases} m=8 \\ n=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=6 \\ n=18 \end{cases}$

因此，$m + n$ 的最小值 $= 16$。

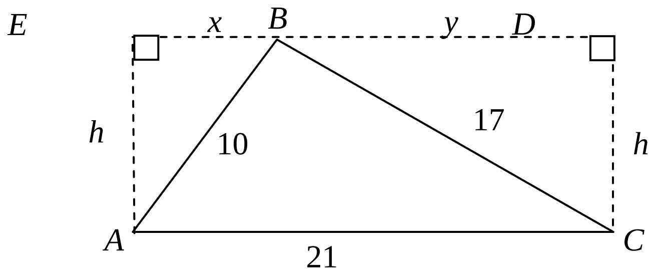
另解： 將方程寫成 $mn - 3m = 5n$

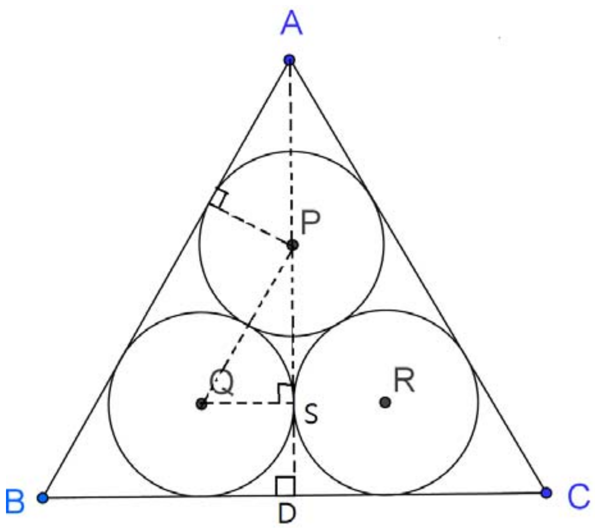
$$m = \frac{5n}{n-3} = 5 + \frac{15}{n-3}$$

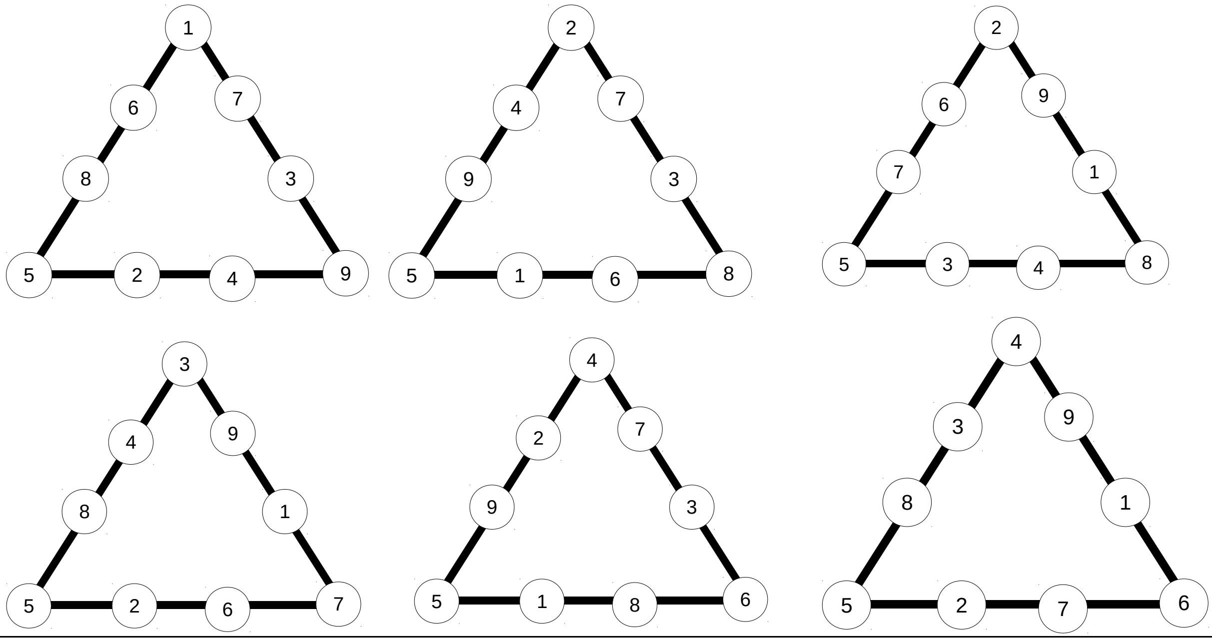
因 $\frac{15}{n-3}$ 必為整數，故 $n - 3 = 1$，3，5 或 15。

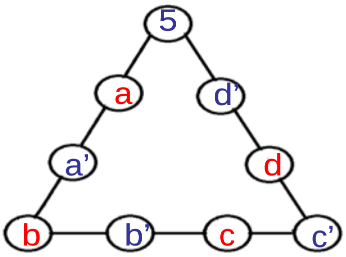
所以 $\begin{cases} m=20 \\ n=4 \end{cases}$，$\begin{cases} m=10 \\ n=6 \end{cases}$，$\begin{cases} m=8 \\ n=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=6 \\ n=18 \end{cases}$

因此，$m + n$ 的最小值 $= 16$。

12.	【19】 $2012^3 \times 2013^3$ $= (2.012 \times 10^3)^3 \times (2.013 \times 10^3)^3$ $= 2.012^3 \times 2.013^3 \times 10^{18}$ $\approx 2^6 \times 10^{18}$ $= 64 \times 10^{18}$ $= 6.4 \times 10^{19}$ $p = 19$
13.	【84】 繪畫長方形 $ACDE$ (如圖) 。  $x + y = 21$ ……...(i) $h^2 + x^2 = 10^2$…….(ii) $h^2 + y^2 = 17^2$……(iii) (iii) – (ii)，得 $(y + x)(y - x) = (17 + 10)(17 - 10)$ $21(y - x) = 27 \times 7$ $y - x = 9$ ……(iv) 解 (i) 及(iv) ，得 $x = 6$, $y = 15$。則 $h = 8$ 。 $\therefore \Delta ABC$ 的面積 $= \dfrac{21 \times 8}{2} = 84$ 。
14.	【502】 因 $x + y + z = 2013$ 及 $x + y > z$, 得 $2z < 2013$ $z < 1006.5$ 使 z 為盡量大，得 $z = 1006$ 及 $x + y = 1007$ 因 $x < y < z = 1006$， $(x, y, z) =$ (2, 1005, 1006) 、(3, 1004, 1006) 、(4, 1003, 1006) 、 …、(503, 504, 1006) ∴有 502 個可能的三角形可以造成 。

15.	【60】 $\frac{EF}{AF}=\frac{1}{2}=\frac{AF}{CF}$ 及 $\angle AFE=\angle CFA=120^{o}$。故 $\triangle AFE$ 與 $\triangle CFA$ 相似。 因此 $\angle ACD+\angle AED=\angle EAF+\angle AEF=\angle AFD=60^{o}$ 。
16.	【32】 設該正方體的邊長為 $y$cm。 $AB^2=(\sqrt{y^2+y^2})^2+y^2=4^2$ $y^2=\frac{16}{3}$ $x=6y^2=32$
17	【$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$】 根據對稱性，C_1、C_2 及 C_3 為大小相等的圓。 設 r 為三個圓的半徑。 (如圖) 連接 $AD\perp BC$，P、Q 及 R 分別為 C_1、C_2 及 C_3 的圓心。  $\text{AD}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{AD}=\text{AP}+\text{PS}+\text{DS}=\frac{r}{\sin 30°}+2r\sin 60°+r=2r+r\sqrt{3}+r=r(3+\sqrt{3})$ $\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2}=r(3+\sqrt{3})$ $r=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ (或 $\frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})}$)

18	以下任何其中一個或其他合理組合: 
乙部 **(每題 6 分)**	
19	(a) 42 (b) (i) 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000 或 9000(任何其中一個) (ii) 2200, 2020 或 2002(任何其中一個) (iii) 1230, 1320, 2130, 2310, 3120, 3210, 1203, 1302, 2103, 2301, 3102, 3201, 1023, 1032, 2013, 2031, 3012 或 3021 (任何其中一個) (iv) 1124, 1142, 1214, 1412, 1241, 1421, 2114, 4112, 2141, 4121, 2411 或 4211 (任何其中一個) 備註 : (b) (i) 恰好有三個零這些數的首個數字必是非零的正整數，包括 1, 2, ..., 9。例如：1000 。因此，恰好有三個零的數，共 9 個。 (ii) 設 $a+b=ab$ ， $a \le b$ 。 則 $ab=a+b \le 2b$, 得 $a \le 2$ 。 當 $a=1$，不合題意。 當 $a=2$，則 $b=2$, 得 $(a, b)=(2, 2)$。 因此，恰好有二個零的數包括 2200, 2020 或 2002 (共 3 個) (iii) 設 $a+b+c=abc$，$a \le b \le c$。 則 $abc=a+b+c \le 3c$, $ab \le 3$，得 $(a, b)=(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ ，其中只有 $(a, b)=(1, 2)$ 合題意。 所以 $(a, b, c)=(1, 2, 3)$ 。這些數恰好有一個零，所以組成這個數的數字包括 0, 1, 2, 3。這些數共有 18 個不同組

	合，其中一個例子是 2013。 (iv) 設 $a+b+c+d=abcd$， $a\le b\le c\le d$。則 $abcd=a+b+c+d\le 4d$，得(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 2) ，其中只有(a, b, c) = (1, 1, 2) 合題意。所以 (a, b, c, d) = (1, 1, 2, 4) 。這些數共有 12 個不同組合，其中一個例子是 2114。 因此，在 1000 至 9999 的正整數中，共有 9 + 3 + 18 +12 = 42 正整數，它的非零數字的和與積是一樣的。
20	先放數字的人(第一參與者)是有必勝法的。他可以首先將數字 5 填入其中一隻頂角上，餘下的 8 個圓圈如下圖編成 4 對。 若對手(第二參與者) 在其他的圓圈內填入數字 k，第一參與者便在另一個配對的圓圈內填入數字 10 – k，使兩個數字和為 10。顯然第二參與者必不能勝出此遊戲，因他不能得另一個 5 與頂角上的 5 配成 10。而第一參與者最終得 b+b’+c+c’=20 勝出此遊戲。 
21	【672】 $M=1!\times 2!\times 3!\times 4!\times 5!\times 6!\times 7!\times 8!\times 9!=2^{30}\times 3^{13}\times 5^{5}\times 7^{3}$ M 的完全平方因子必可表成 $2^{2x}\times 3^{2y}\times 5^{2z}\times 7^{2w}$，當中 x、y、z、w 為非負整數使得 $2x\le 30$、$2y\le 13$、$2z\le 5$ 、$2w\le 3$。 所以 M 的完全平方因子共有 $16\times 7\times 3\times 2=672$ 個。

~ End 完 ~

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、郭家強老師、馮德華老師、徐崑玉老師、鄭永權老師、潘維凱老師