香港青少年數學精英選拔賽 2011 – 2012

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest 2011 – 2012

建議題解

甲部　(每題 2 分) 把答案填在答題紙所提供的位置。

1.　【4】

注意　$1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3+9^3+10^3$ 的末位數字爲 5。

(因 1+8+7+4+5+6+3+2+9=45)，每 10 項之和的末位數字是 5。

即每 20 項之和的末位數字是 0，

所以$1^3+2^3+3^3+\cdots+2009^3+2010^3$的末位數字爲 5，

因此，$1^3+2^3+3^3+\cdots+2011^3+2012^3$ 的末位數字爲 4　(因 5+1+8=14)。

另解：

利用 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$ ，

只須考慮 n 的末兩位數，得 $(\frac{(12)(12+1)}{2})^2$ 的個位數爲 4。

2.　【33】

$N=20122012\cdots2012$

每一個 2012 的數字之和是 2+0+1+2 = 5，$\therefore k$ 必是 3 的倍數

每一個 2012 的偶數位的數字之和與奇數位的數字之和的差是 2–0+1–2 = 1，

$\therefore k$ 必是 11 的倍數

而 3 與 11 的 LCM 是 33，因此，$k=33$。

3.　【18】

$x+\frac{1}{x}=3$ ，$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$ ，$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=7$

$(x^2+\frac{1}{x^2})(x+\frac{1}{x})=7\times3$

$x^3+(x+\frac{1}{x})+\frac{1}{x^3}=21$

因此，$x^3+\frac{1}{x^3}=21-3=18$。

4. 【16】

設至少需要 x 步加上 12 的運算及 y 步減去 7 的運算。

要將 2010 變爲 2012，

$2010+12x-7y=2012$

$x=\frac{2+7y}{12}$ ，

因 $2+7y$ 必是 12 的倍數，

得 $y = 10$，$x = 6$。

因此，至少需要 $x + y = 16$ 步。

5. 【1002】

$x^2-xy=2012$

$x(x-y)=1\times 2012=2\times 1006=4\times 503$

因 $x>0$ 及 $x-y>0$ ，

所以滿足以上條件的 (x, y) 有 (503, 499), (1006, 1004), (2012, 2011)

因此，兩個數之和的最小可能值 = 1002。

6. 【$\frac{1}{6}$】

連接 BE 相交 CF 於 G，連接 AG。

ΔABF 的面積 $=\Delta AFG$ 的面積 $=\frac{1}{6}\times ABCDEF$ 的面積 $=\frac{1}{6}$ 。

7. 【81】

設該兩位數爲$10a+b$ 。

因 $(a+b)^2$ 亦是兩位數，$\therefore 16\le(a+b)^2\le 81$ ，

所以該兩位數可以是 16、25、36、49、64 及 81，

只有 $81 = (8 + 1)^2$ 合題意。因此，該兩位數是 81。

8. 【20.14】

$20.095\le x<20.195$

$140.665\le 7x<141.365$

$\therefore 7x=141$

因此，x 的正確值$=\frac{141}{7}\approx 20.14$ (準確至兩位小數)。

另解： $20.12 \times 7 = 140.84$

$140 \div 7 = 20$ (不合題意，故捨去)

$141 \div 7 \approx 20.14$ (合題意)

$142 \div 7 \approx 20.29$ (不合題意，故捨去)

9. 【5】

$CE^2 = Y + Z = 30 + 139 = 169$ ，

$CD^2 = X + Y = 114 + 30 = 144$ ，

在ΔCDE ， $ED^2 = CE^2 - CD^2$

$ED^2 = 169 - 144 = 25$

因此， $ED = 5$ 。

另解： 正方形 $ABCD$ 的面積 $= X + Y = 114 + 30 = 144$ ，$\therefore CD = 12$

考慮ΔCDE 的面積，$\frac{1}{2} \times CD \times ED = 30$ ，因此， $ED = 5$ 。

10. 【358】

$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$

$= 100 \times (2a + 2b + 2c) + 10 \times (2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c)$

$= 222 \times (a + b + c)$

所以 $\overline{abc} = 222 \times (a + b + c) - 3194$ ，即 $\frac{\overline{abc} + 3194}{222} = a + b + c$

因 $a < b < c$ ，

由 $\frac{123 + 3194}{222} \le a + b + c \le \frac{789 + 3194}{222}$ ，得 $14.94 \le a + b + c \le 17.94$

若 $a + b + c = 15$ ， $\overline{abc} = 222 \times 15 - 3194 = 136$ (1+3+6 ≠15，故捨去)

若 $a + b + c = 16$ ， $\overline{abc} = 222 \times 16 - 3194 = 358$ (3+5+8=16 合題意)

若 $a + b + c = 17$ ， $\overline{abc} = 222 \times 17 - 3194 = 580$ (5+8+0≠17，故捨去)

因此，$\overline{abc} = 358$ 。

11. 【$(-1, 3\sqrt{3})$ 及 $(-1, -3\sqrt{3})$】

x-坐標 $= \frac{-4 + 2}{2} = -1$

由 ΔABC 的邊長 $= 2 + 4 = 6$ ，高 $= \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ，

得 y-坐標 $= 3\sqrt{3}$ 或 $-3\sqrt{3}$ 。

因此，C 的坐標爲 $(-1, 3\sqrt{3})$ 及 $(-1, -3\sqrt{3})$

12. 【$\frac{9}{4}$ 或 2.25】

因邊長分別爲 3、4 及 5

設 E 爲 D 到 AC 之垂足，ΔABD 及 ΔAED 全等 (AAS)。

故 $DB = DE$。所以 ΔABD 及 ΔADC 的面積比爲 AB：$AC = 3$：5。

因此，ΔABD 之面積 $= \Delta ABC$ 的面積$\times\frac{3}{8}=\frac{3\times4}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{4}$。

13. 【37】

由 $x + y = 5$ 得 $x = 5 - y$，

代入另一等式得 $z^2 = y(5 - y) + y - 9 = -(y - 3)^2$

等式左邊爲非負數，右邊卻是非正數，可見 $z = 0$，得 $y = 3$ 及 $x = 2$。

因此，故 $2x + 11y + 2012z = 2(2) + 11(3) + 2012(0) = 37$。

14. 【180°】

因扇形的弧長等於圓錐體底部的周長，

$$2\pi\, y\times\frac{t}{360^\circ}=2\pi\, x$$

因此，$t=\frac{x}{y}\times360^\circ=180^\circ$

15. 【$4+2\sqrt{2}$】

由 $\frac{a+b+c}{a+c}=\sqrt{2}$ 推得 $\frac{b}{a+c}=\sqrt{2}-1$。

故 $c^2-a^2=b^2=(\sqrt{2}-1)^2(a+c)^2$。

消去 $a+c$，得 $c-a=(3-2\sqrt{2})(a+c)$，化簡後得 $c=\sqrt{2}a$。

由 $(\sqrt{2}a)^2-a^2=b^2$，得 $a=b$，所以該三角形爲等腰直角三角形；

由 $\frac{1}{2}\times a\times a=2$，得 $a=2$，$b=2$ 及 $c=2\sqrt{2}$

因此，三角形的周界爲 $2+2+2\sqrt{2}=4+2\sqrt{2}$。

16. 【1】

設 $BE = x$，$PB = y$，則

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{y}{1} = \dfrac{x}{x+1} \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由 (2)， 得 $x - y = xy$。

由 $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$(x-y)^2 = 3 - 2(x-y)$

$(x-y)^2 + 2(x-y) - 3 = 0$

$[(x-y)-1][(x-y)+3] = 0$

$\therefore x - y = 1$ 或 $x - y = -3$ ($x - y = xy > 0$，故捨去)

因此， $x - y = 1$。

17. 【$\sqrt{15}$】

從 X、Y 及 Z 向 AE 作垂線，垂足分別爲 P、Q 及 R。

由於ΔAWB, ΔBXC, ΔCYD 及 ΔDZE 都是等腰三角形，

所以 $BP = PC = CQ = QD = DR = RE = \dfrac{1}{2}$ ，

在 ΔAZR，$AZ = AE = 4$， $RZ^2 = 4^2 - (\dfrac{7}{2})^2 = \dfrac{15}{4}$ ；

在 ΔAYQ， $AY^2 = (\dfrac{5}{2})^2 + \dfrac{15}{4} = 10$ ， $AY = \sqrt{10}$ ；

在 ΔAXP， $AX^2 = (\dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{15}{4} = 6$ ， $AX = \sqrt{6}$ ，

新三角形的邊長分別爲 4、$\sqrt{10}$ 及 $\sqrt{6}$ ，

因 $(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{10})^2 = 4^2$ ，利用畢氏定理逆定理，可知新三角形是一直角三角形，且斜邊長是 4。

因此，該新三角形的面積$= \dfrac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{10} = \sqrt{15}$ 。

18. 【48】

於正方體表面的直角三角形(如 ΔABD) 共 $4 \times 6 = 24$ 個

斜邊爲正方體對角線的直角三角形(如 ΔABF) 共 $4 \times 6 = 24$ 個

共 24+24 = 48 個直角三角形。

乙部 **(每題 6 分)** 把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

19. 【3】

$\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}}=\sqrt{(\sqrt{x+7}-1)^2}$ 及 $\sqrt{x+16-6\sqrt{x+7}}=\sqrt{(\sqrt{x+7}-3)^2}$

情況(1)：當 $\sqrt{x+7}\geq 3$ (即 $x\geq 2$) 時，

$\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+16-6\sqrt{x+7}}=2$

$\sqrt{(\sqrt{x+7}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+7}-3)^2}=2$

$\sqrt{x+7}-1+\sqrt{x+7}-3=2$

$2\sqrt{x+7}=6$

得 $x = 2$。

情況(2)：當 $3>\sqrt{x+7}\geq 1$ (即 $2>x\geq -6$) 時，

$\sqrt{(\sqrt{x+7}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+7}-3)^2}=2$

$\sqrt{x+7}-1-\sqrt{x+7}+3=2$

$2 = 2$

$\therefore 2>x\geq -6$，

因 x 爲正整數，得 $x = 1$。

情況(3)：當 $1>\sqrt{x+7}$ (即 $-6>x$ 時)，

因 x 爲正整數，故捨去。

因此，方程的所有正整數根爲之和爲 $1 + 2 = 3$。

20. 【(a) 2401 (b) 49 (c) 8824】

(a) 只能 0、1、2、5、6、8 及 9，

因此 ，有 $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$ 個「倒轉數」。

(b) 首兩個數字決定末兩個數字。

因此 ，有 $7 \times 7 = 49$ 個「倒轉數」與原來的數相同。

(c) 顯示的數包括

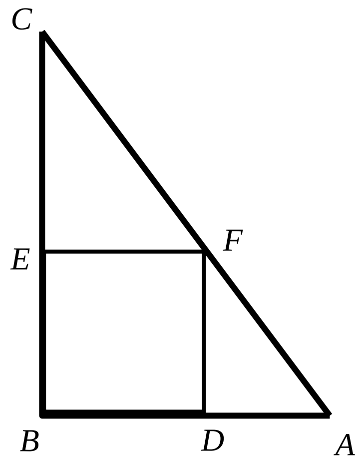
(1) 與原來的數不相同的「倒轉數」: 需要 $\dfrac{2401-49}{2}=1176$ 張紙卡；

(2) 與原來的數相同的「倒轉數」: 需要 49 張紙卡；

(3) 非「倒轉數」: 需要 $10000 - 2401= 7599$ 張紙卡，

即共需要 $1176 + 49 + 7599 = 8824$ 張紙卡。

21. 【$\dfrac{3600}{1369}$】



情況(1)：

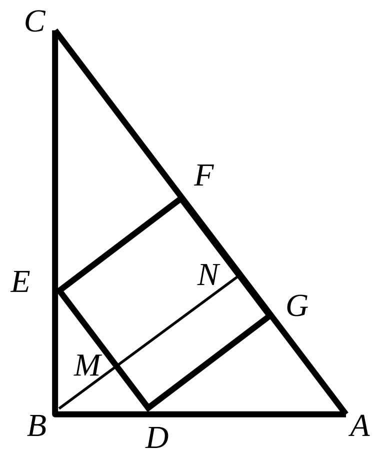
設 x 爲內接正方形 $BEFD$ 的邊長。

因 $\Delta ABC \sim \Delta FEC$ (A.A.A)

$$\frac{AB}{FE}=\frac{BC}{EC}$$

$$\frac{3}{x}=\frac{4}{4-x}$$

$$\therefore x=\frac{12}{7}$$



情況(2)：

設 y 爲內接正方形 $DEFG$ 的邊長。

因 $\Delta ABC \sim \Delta DBE$ (A.A.A)

$AB:BC:AC=DB:BE:DE=3:4:5$

$\therefore$ $DB=3k$、$BE=4k$、$DE=5k$ 其中 $k\neq 0$ 。

設 M 及 N 分別爲 B 到 DE 及 AC 之垂足。

在ΔABC， $\dfrac{BN\times 5}{2}=\dfrac{3\times 4}{2}$ 得 $BN=\dfrac{12}{5}$ ，

在ΔDBE， $\dfrac{BM\times 5k}{2}=\dfrac{3k\times 4k}{2}$ 得 $BM=\dfrac{12k}{5}$ 。

因 $BM+MN=BN$

$$\frac{12k}{5}+5k=\frac{12}{5}$$

即 $k=\dfrac{12}{37}$ ，

$$\therefore y=MN=5\times\frac{12}{37}=\frac{60}{37}$$

比較情況(1) 及 情況(2)，

得 $x>y$

因此，最小內接正方形的面積 $=(\dfrac{60}{37})^2=\dfrac{3600}{1369}$ 。

~ End 完 ~

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、
馮德華老師、徐崑玉老師、郭家強老師、潘維凱老師