香港青少年數學精英選拔賽

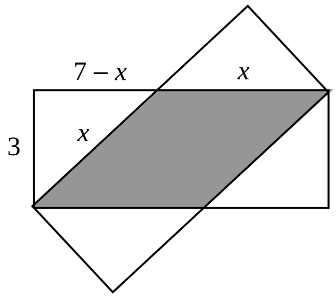
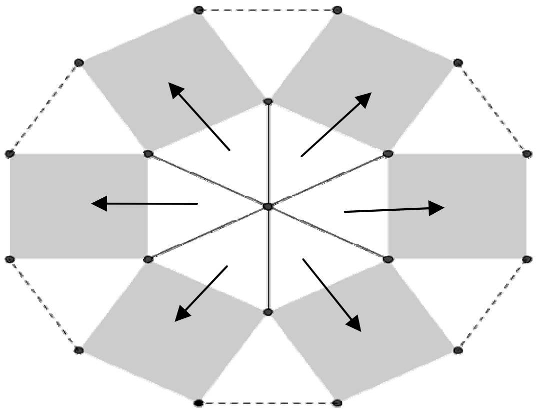
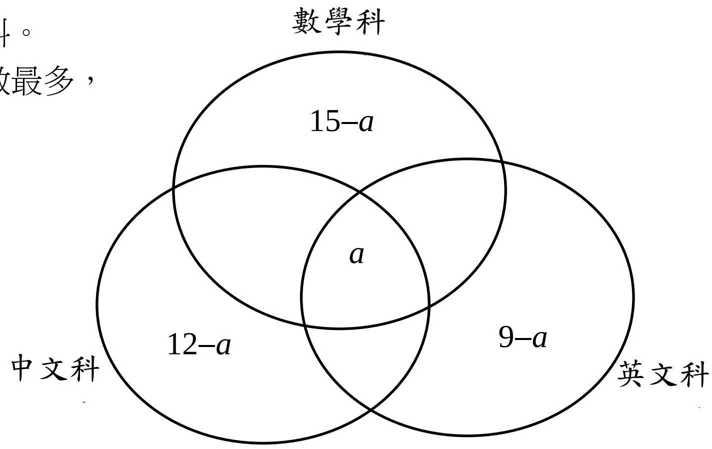
The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

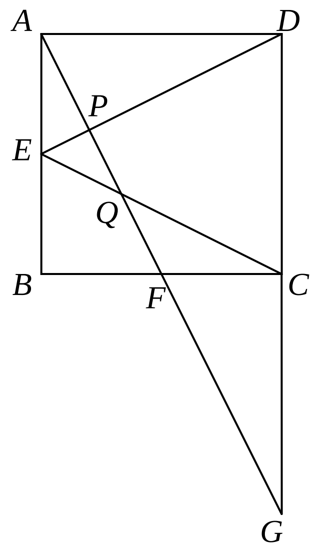
2010 – 2011

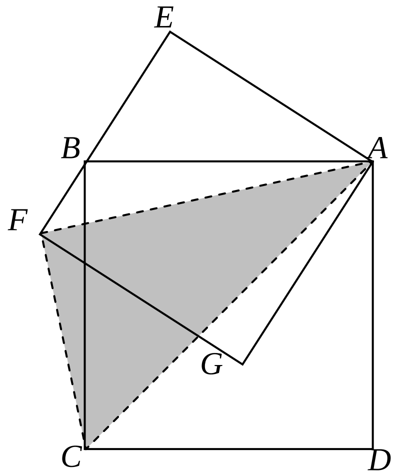
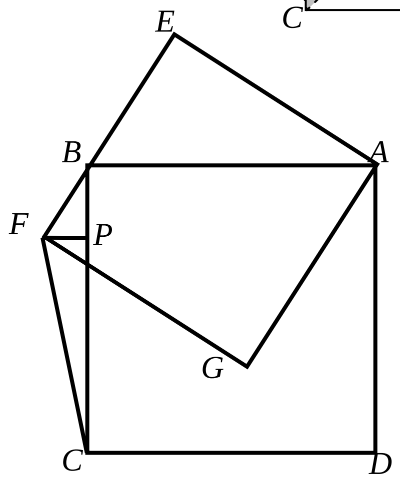
Suggested Solutions

1.	[500] 三位數可以是 500 至 999，共有 999 – 500 +1 = 500 種寫法。
2.	[72] $2011^{3x+2y} = (2011^x)^3\,(2011^y)^2 = 2^3 \times 3^2 = 72$。
3.	$[\frac{121}{1000}]$ $\frac{x}{11\times13}+\frac{x}{13\times15}+\cdots+\frac{x}{2009\times2011}=\frac{11}{2011}$ $\frac{x}{2}(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011})=\frac{11}{2011}$ $\frac{x}{2}(\frac{1}{11}-\frac{1}{2011})=\frac{11}{2011}$ $\frac{x}{2}(\frac{2000}{11\times2011})=\frac{11}{2011}$ $x=\frac{11\times2011}{2000}\times\frac{11}{2011}\times2$ $x=\frac{121}{1000}$
4.	[–2010] $C-D=2011,\quad \therefore C=D+2011$ $B-C=-2010,\ \therefore B=C-2010=D+1$ $A-B=2009,\ \therefore A=B+2009=D+2010$ $\therefore \frac{(A-D)}{(A-C)(B-D)}=\frac{2010}{(-1)\times(1)}=-2010$。
5.	$[1006^2 - 1005^2]$ 設 $2011 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$。 因爲 2011 是質數，得 $m + n = 2011$ 及 $m - n = 1$。 所以 m 和 n 分別爲 1006 和 1005。

<table>
<tr><td>6.</td><td>[16]
將「立方積」表示爲 $2^m \times 3^n$ 形式
<table>
<tr><td>當 n= 0</td><td>m 可取值 0、1、2、3、4、5、6</td><td>有 7 個不同數字</td></tr>
<tr><td>當 n= 1</td><td>m 可取值 0、1、2、3、4</td><td>有 5 個不同數字</td></tr>
<tr><td>當 n= 2</td><td>m 可取值 0、1、2</td><td>有 3 個不同數字</td></tr>
<tr><td>當 n= 3</td><td>m 可取值 0</td><td>有 1 個不同數字</td></tr>
</table>
所以不同的數字共有 7 + 5 + 3 + 1 = 16 個。</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>[56 cm^3]
以ΔABC 爲底，AD 爲高，
ΔABC 的面積 $=\frac{1}{2}\times 6\times 7$ = 21 cm^2
角錐體 ABCD 的體積 $=\frac{1}{3}\times 21\times 8$ = 56 cm^3。</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>[01011]
個位數 = 2 011 個 1，
十位數 = 2 010 個 1，
百位數= 2 009 個 1，
千位數= 2 008 個 1，
萬位數 = 2 007 個 1
$$\begin{array}{r} 2011 \\ 20100 \\ 200900 \\ 2008000 \\ +\quad 20070000 \\ \hline 22301011 \end{array}$$
即 2 011 + 20 100 + 200 900 + 2 008 000 + 20070 000…= 22 301 011+ …</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>[60]
設 2010 = (n + 1) + (n + 2) + … + (n + k)，則 $k(2n + k + 1) = 4020$。
注意到 $k < 2n + k + 1$ 及 $4020 = 2^2\times 3\times 5\times 67$，故如欲使 k 最大，要將 4020 表示成兩個相近的數的積。即 4020 = 60×67。
因此，k 的最大可能值爲 60。</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>[24]
恰好有四個面與其他小立方體的面相連接的小立方體必有 2 個面暴露在外，在大立方體的每條稜上都有 2 個這樣的小立方體，而大立方體共有 12 條稜，所以這樣的小立方體有 2×12 = 24 個，得 x = 24 。</td></tr>
</table>

11.	[$\frac{87}{7}$ cm^2] 注意到所有非重疊部份皆爲全等三角形。 由畢氏定理，得 $x^2 = (7-x)^2 + 3^2$， 化簡後得 $x = \frac{29}{7}$ 。 由此得重疊部份面積爲 $\frac{29}{7} \times 3 = \frac{87}{7}$ cm^2。 
12.	[24 cm^2] 將圖中六個三角形如下重組後，可見該星形大小與六個邊長 2cm 的正方形相同。 
13.	[7] 設有 a 名學生修讀了全部中英數三科。 要修讀了全部中英數三科的學生人數最多， 只修讀了兩科的學生人數就要最少， 即 0 名學生只修讀了兩科。 $(15-a)+(12-a)+(9-a)+a=22$ $36-2a=22$ $a=7$  所以最多有 7 名學生修讀了全部中英數三科。
14.	[25] 由給予條件與畢氏定理得： $a^2+b^2=c^2=\frac{1}{9}(ab)^2-\frac{2}{3}ab(a+b)+(a+b)^2$ 化簡後得 $ab-6(a+b)+18=0$。

	因式分解左式得 $(a-6)(b-6)=18$。 因 a 和 b 皆爲整數，不妨假設 $a<b$，有 $\begin{cases}a-6=1\\b-6=18\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-6=2\\b-6=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-6=3\\b-6=6\end{cases}$。 故 (a, b, c) 的可能值爲 $=(7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 12, 15)$。
15.	[$\frac{1}{30}$] 解；設 AF 交 DC 於 G，因 F 爲中點，$AB=CG$。 由相似三角形 AEP 及 GDP 可得 $EP: PD = AE : GD = 1 : 4$。 故 $EP = \frac{1}{5}ED$。 由相似三角形 AEQ 及 GCQ 可得 $EQ: QC = AE : GC = 1 : 2$。 故 $EQ = \frac{1}{3}EC$。 所以三角形 EPQ 的面積 ＝三角形 EDC 的面積 $\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$ 
16.	[$\frac{21}{2048}$] $\frac{1}{2^{10}+1}+\frac{1}{2^{10}+2}+\frac{1}{2^{10}+2^2}+\frac{1}{2^{10}+2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{10}+2^{20}}$ $=\left(\frac{1}{2^{10}+1}+\frac{1}{2^{10}+2^{20}}\right)+\left(\frac{1}{2^{10}+2^1}+\frac{1}{2^{10}+2^{19}}\right)+\cdots+\frac{1}{2^{10}+2^{10}}$ $=\left(\frac{2^{10}+1}{2^{10}(2^{10}+1)}\right)+\left(\frac{2^9+1}{2^{10}(2^9+1)}\right)+\cdots+\left(\frac{2+1}{2^{10}(2+1)}\right)+\frac{1}{2^{11}}$ $=\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{11}}$ $=\frac{21}{2^{11}}=\frac{21}{2048}$
17.	[45] 首先注意到 $44<\sqrt{2011}<45$，故 $45^2=2025<2055=2011+44<2011+\sqrt{2011}<45+2011=2056<2116=46^2$

	由此得 $45<\sqrt{2011+\sqrt{2011}}<46$。 同樣地，從 $45^2<2011+45<2011+\sqrt{2011+\sqrt{2011}}<2011+46<46^2$ 得 $45<\sqrt{2011+\sqrt{2011+\sqrt{2011}}}<46$。 繼續此步驟，得 $45<\sqrt{2011+\sqrt{2011+\cdots+\sqrt{2011}}}<46$。 因此 $\sqrt{2011+\sqrt{2011+\cdots+\sqrt{2011}}}$ 的整數部份爲 45。
18.	[$3\sqrt{2}$]  $AF:AE=\sqrt{2}:1$， $AC:AB=\sqrt{2}:1$， 並且 $\angle FAC=45^{\circ}-\angle BAF=\angle EAB$。 所以三角形 *AFC* 及三角形 *AEB* 爲相似三角形。 故 $FC:EB=\sqrt{2}:1$， $FC=3\sqrt{2}$。 另解：設 *P* 爲 *F* 在 *BC* 上的垂足。 由畢氏定理可得 $BE=3$。 所以 $BF=1$。 由相似三角形或三角比， 得出 $FP=0.6$, $BP=0.8$, $PC=4.2$ 因此 $FC=\sqrt{0.6^2+4.2^2}=3\sqrt{2}$ 

乙部　　Part B

19.	[$7\sqrt{3}$] ΔBDP 的面積 $= \Delta BDC$ 的面積 $- \Delta DCP$ 的面積 $- \Delta BCP$ 的面積 $=\left(\frac{1}{2}\times 6\times 10-\frac{1}{2}\times 2\times 10-\frac{1}{2}\times 6\times 2\right)\times\sin 60^\circ$ $=14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$ cm^2
20.	[403] 首先擦去由 1 至 2 011 中 5 的倍數 (即擦去 402 個整數) ，因爲 5 的倍數的末位數字只能是「5」或「0」。 1×2×3×4×6×7×8×9 的末位數字是「6」; 11×12×13×14×16×17×18×19 的末位數字亦是「6」; … … … 1991×1992×1993×1994×1996×1997×1998×1999 的末位數字亦是「6」; 2001×2002×200×2004×2006×2007×2008×2009×2011 的末位數字亦是「6」; ∴ 1×2×3×4×6×7×8×9×11×12×…×1998×1999×2011 的末位數字即 6 的末位數字亦是「6」。 ∴ 只要再擦去「3」或「8」,就可以令留在黑板上的全部整數的乘積的末位數字就是「2」。 ∴即至少要擦去 402+1 = 403 個整數。

21	[12122112] 首先觀察可有這樣的 N 位數能被 2^N 整除:： 當 N = 1, 有 1 位數 2 能被 2^1 整除。 當 N = 2, 有 2 位數 12 能被 2^2 整除。 當 N = 3, 有 3 位數 112 能被 2^3 整除。 當 N = 4, 有 4 位數 2112 能被 2^4 整除。 當 N = 5, 有 5 位數 22112 能被 2^5 整除。 等等。 從觀察及推論，這樣的 N 位數是存在且唯一的。 經驗証 12122112 = 256×47352，這個 8 位數是 12122112。 另解： 假設所求數爲 $\overline{ABCDEFGH}$ ，而 $256 = 2^8$ 。 因爲 $\overline{ABCDEFGH} = \overline{ABCDEFG} \times 10 + H$ ，其中前部分必可被 2 整除，所以 H = 2。 同理 $\overline{ABCDEFGH} = \overline{ABCDEF} \times 100 + \overline{G2}$ ，其中前部分必可被 2^2 整除，所以 G = 1。 類似地，$\overline{ABCDEFGH} = \overline{ABCDE} \times 1000 + \overline{F12}$ ，得到 F = 1。 重覆以上推論，這樣的 8 位數是存在且唯一的。 答案是 12122112。

擬題委員會：　蕭文強教授(香港大學)、吳端偉助理教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、
馮德華老師、郭家強老師、潘維凱老師、徐崑玉老師、徐鳳鳴老師