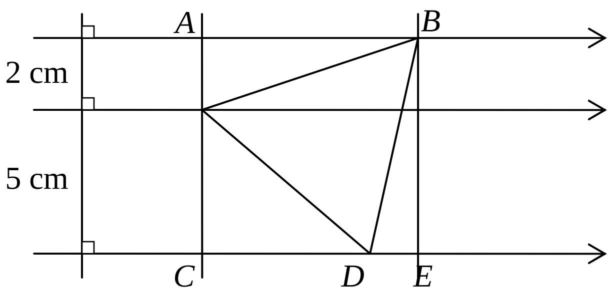
香港青少年數學精英選拔賽

**The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest**

**2009 – 2010**

**Suggested Solutions**

| | |
|---|---|
| 1. | [–1005]<br>$(2010 - m)^2 + (m - 2009)^2$<br>$= [(2010 - m) + (m - 2009)]^2 - 2(2010 - m)(m - 2009)$<br>$= 1 - 2(2010 - m)(m - 2009)$<br>$\therefore\ 2011 = 1 - 2(2010 - m)(m - 2009)$<br>$(2010 - m)(m - 2009) = \dfrac{1 - 2011}{2} = -1005$ |
| 2. | [–4000]<br>因$(a-20)^2, \sqrt{b+10}, \dfrac{c^2}{2010} \geq 0$，得 a = 20, b = – 10 及 c = 0。<br>$\therefore\ M = 20(20)(-10) - 10(-10)(0) = -4000$ |
| 3. | [– 1]<br>$a + b(1+a) + c(1+a)(1+b) + d(1+a)(1+b)(1+c) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$<br>$= -1 + (1+a) + b(1+a) + c(1+a)(1+b) + d(1+a)(1+b)(1+c) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$<br>$= -1 + (1+a)(1+b) + c(1+a)(1+b) + d(1+a)(1+b)(1+c) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$<br>$= -1 + (1+a)(1+b)(1+c) + d(1+a)(1+b)(1+c) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$<br>$= -1 + (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$<br>$= -1$ |
| 4 | [2037181]<br>跟據觀察，我們有<br>$\ldots\ \dfrac{2018}{1}, \dfrac{1}{2019}, \dfrac{2}{2018}, \dfrac{3}{2017}, \ldots, \dfrac{10}{2010}, \ldots$<br>$n = (1+2+3+\ldots+2018) + 10 = \dfrac{(1+2018)2018}{2} + 10 = 2037181$ |
| 5 | $[\dfrac{7}{3}]$<br>$\dfrac{1+2^2+2^4+2^6+\Lambda+2^{100}}{1+2^3+2^6+2^9+\Lambda+2^{99}} = \dfrac{(1+2^2+2^4)+(2^6+2^8+2^{10})+\Lambda+(2^{96}+2^{98}+2^{100})}{(1+2^3)+(2^6+2^9)+\Lambda\ (2^{96}+2^{99})}$<br>$= \dfrac{(1+2^2+2^4)(1+2^6+2^{12}+\Lambda\ 2^{96})}{(1+2^3)(1+2^6+2^{12}+\Lambda+2^{96})} = \dfrac{1+2^2+2^4}{1+2^3} = \dfrac{21}{9} = \dfrac{7}{3}$ |

| | |
|---|---|
| 6 | [4040098]<br>$x^2-2010x+1=0$ ，即 $x+\dfrac{1}{x}=2010$ ， $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2010^2-2=4040098$ 。 |
| 7 | [3]<br>多邊形的外角之和爲 $360^o$ ，所以任何的多邊形至多只能包含 4 隻直角的外角。<br>因此，最多只能包含 3 隻鈍角的外角，即任何的多邊形至多只能有 3 隻銳角。 |
| 8 | [ $\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ ]<br><br><br>等邊三角形的邊長爲 $x$ cm 。如圖示，利用畢氏定理，<br>$\sqrt{x^2-2^2}=AB=CD+DE=\sqrt{x^2-5^2}+\sqrt{x^2-7^2}$ ,<br>$\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2-25}=\sqrt{x^2-49}$<br>$x^2-4-2\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-25}+x^2-25=x^2-49$<br>$x^2+20=2\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-25}$<br>$x^4+40x^2+400=4(x^4-29x^2+100)$<br>$156x^2=3x^4$, $3x^2(x^2-52)=0$, 由於 $x>0$ ,所以 $x=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ 。 |
| 9 | [9]<br>大正方體的每條對角線穿過小正方體的個數是相同的，因此大正方體的每條對角線穿過的個數是 4 的倍數，而 33 不是 4 的倍數，亦即 4 條對角線的交匯處的那個小正方體被重覆計算了 4 次，<br>$\therefore$每條對角線穿過小正方體的個數是 (33+3)÷4 = 9。<br>而大正方體的邊長即是大正方體的每條對角線穿過小正方體個數，所以 $n$ =9。 |

10 [$2010^8$]

$2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$，不同正因子的數量有 $2^4 = 16$ 個。

正因子 $x$ 與 $\dfrac{2010}{x}$ 是一起出現的，因此，所有不同正因數的積 = $2010^8$。

11 [6]

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 尾數 | 0 | 1 | 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 5 | …… |

當 $n > 1$, $x_n$ 的個位數字的周期是 4，所以 $x_{2010}$ 的個位數字是 1，$x_{2009}$ 的個位數字是 5。因此，$x_{2010} - x_{2009}$ 的個位數字是 6。

12 [19]

設三角形的三邊長度分別爲 a、b、c，且 $a \le b \le c$。

當 $c$ =13，我們有 (a, b) = (1, 13) 或 (2, 12) 或 (3, 11) 或 ….. 或 (7, 7)，共 7 個組合。

當 $c$ =12，我們有 (a, b) = (3, 12) 或 (4, 11) 或 (5, 10) 或 (6, 9)或 (7, 8)，共 5 個組合。

當 $c$ =11，我們有 (a, b) = (5, 11) 或 (6, 10) 或 (7, 9) 或 (8, 8)，共 4 個組合。

當 $c$ =10，我們有 (a, b) = (7, 10) 或 (8, 9)，共 2 個組合。

當 $c$ =9，我們有 (a, b) = (9, 9)，共 1 個組合。

因此，不同組合的數量有 19 個。

13 [4042110]

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2010}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2010}$$

$$2010x + 2010y = xy$$

$$x = \frac{2010y}{y-2010}$$

當 $x$ 取最大時，$y - 2010 = 1$，得 $x = 2010 \times 2011 = 4042110$。

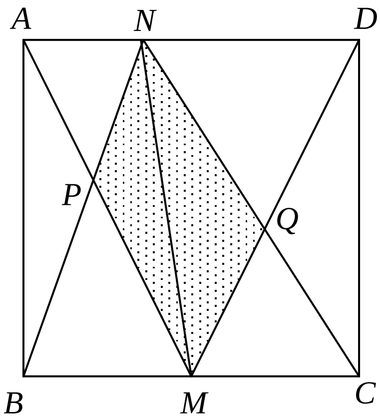
另解：

$xy - 2010x - 2010y = 0$

$(x - 2010)(y - 2010) = 2010^2$

當 $x - 2010$ 取最大時，$y - 2010 = 1$，得 $x = 2010^2 + 2010 = 4042110$。

14 [17: 70]




先求出$\Delta MNP$ 與 $ABCD$ 之面積比。

由於 $AN$:$BM$ = 2 : 3, $S_{ANP}$ : $S_{MNP}$ : $S_{ABP}$ : $S_{PBM}$ = 4 : 6 : 6 : 9

所以$\Delta MNP$ 的面積爲 $ABCD$ 的$\dfrac{6}{4+6+6+9}\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{10}$,

同樣地, 由於 $ND$: $MC$ = 4 : 3, $S_{NDQ}$ : $S_{NMQ}$ : $S_{DQC}$ : $S_{MQC}$ = 16 : 12 : 12 : 9

所以$\Delta MNQ$ 的面積爲 $ABCD$ 的$\dfrac{12}{16+12+12+9}\cdot\dfrac{7}{12}=\dfrac{1}{7}$,

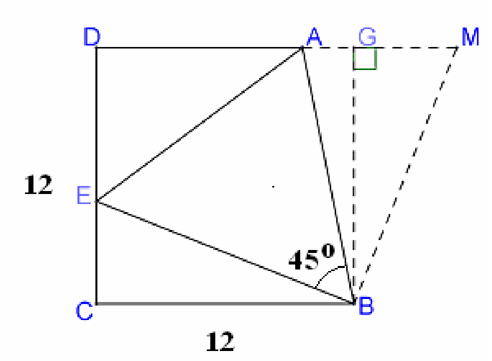
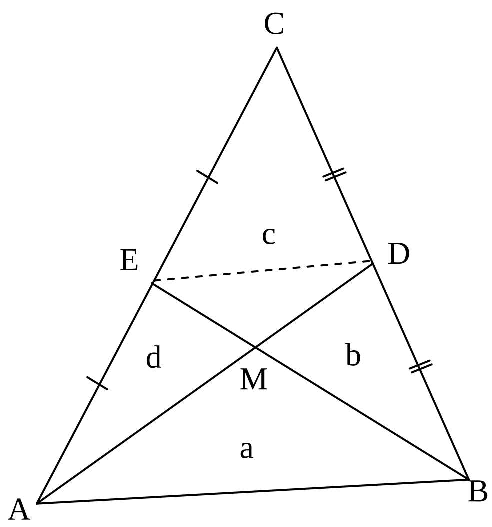
因此，陰影部份佔 $ABCD$ 的$\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{17}{70}$ 。

15 [$\dfrac{1}{2}(3^{1005}+1)$ ]

當 $x=1$，得 $a_{2010}+a_{2009}+a_{2008}+\Lambda+a_2+a_1+a_0=3^{1005}\Lambda\Lambda$ (1) ，

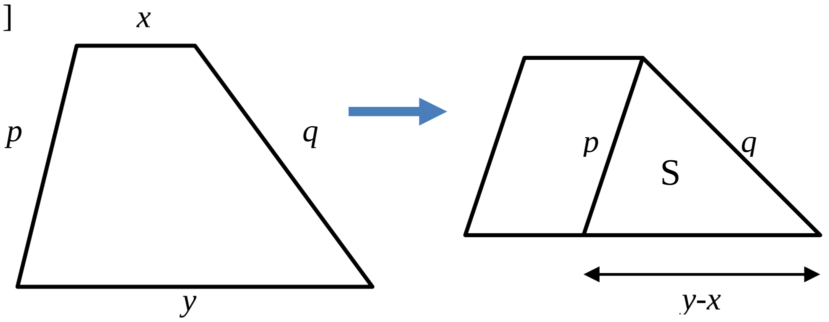
當 $x=-1$，得 $a_{2010}-a_{2009}+a_{2008}-\Lambda+a_2-a_1+a_0=1\Lambda\Lambda$ (2) ，

$\dfrac{1}{2}\times[(1)+(2)]$ ： $a_{2010}+a_{2008}+a_{2006}+\Lambda+a_6+a_4+a_2+a_0=\dfrac{1}{2}(3^{1005}+1)$

<table>
<tr><td>16</td><td>[4 或 6]<br>將ΔBEC 繞 B 點順時針旋轉 $90^{o}$ 得 $\Delta BMG$ ，及得 BCDG 爲正方形。<br>
<br>∴ BC = BG 及 BE = BM，<br>因 ∠CBE = ∠GBM， ∴∠ ABM = ∠ABE = 45°<br>∴ ΔABE ≅ ΔABM (SAS)<br>∴ AM =AE = 10<br>設 CE = $x$，AG = 10 – $x$，AD = 12 – (10 – $x$) = 2 + $x$，DE = 12 – $x$<br>在ΔADE 中，$10^2 = (x + 2)^2 + (12 - x)^2$<br>∴ $x^2 - 10x + 24 = 0$<br>∴ $x = 4$ 或 $x = 6$<br>∴ CE = 4 或 6</td></tr>
<tr><td>17</td><td>[270, 272, 274]<br>注意到 $270^3 = 19683000$ 而 $280^3 = 21952000$ ，可知所求的中間數約爲 27*。由於積的尾數是 0，所求數中必包含 270 或 280。直接嘗試可得 270 x 272 x 274 = 20122560。</td></tr>
<tr><td>18</td><td>[d = b < c = a]<br>
<br>因爲 E 和 D 是中點，所以 a + b = c + d 及 a + d = b + c. 由此，b = d 及 a = c.<br>此外連接 DE 後可知ΔCDE 與ΔBDE 有相同面積，因此 c > b。</td></tr>
</table>

乙部 Part B

| | |
|---|---|
| 19 | [$\frac{10\sqrt{2}}{3}$] |




(如圖) 梯形有一對平行邊和另一對非平行的對邊。設一對平行邊的長度分別為 $x$ 、$y$ ( $y > x$) 及一對非平行的對邊的長度分別為 $p$、$q$ ( $q > p$)。考慮對邊長度與平行關係，可得以下六個組合。 另外，如果這四邊可構成一個梯形，這個梯形應可分爲一個平行四邊形和一個三角形。 當中三角形 S 的一邊應爲梯形兩底之差(見圖解)。 如下表所示，只有組合 V 能真正構作成一個梯形。

| 組合 | 平行邊 $x, y$ | 非平行對邊 $p, q$ | 兩底之差 $y-x$ | 結論 |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 , 2 | 3 , 4 | 1 | 3 , 4 , 1 不可構成三角形 |
| II | 3 , 4 | 1 , 2 | 1 | 1 , 2 , 1 不可構成三角形 |
| III | 1 , 3 | 2 , 4 | 2 | 2 , 4 , 2 不可構成三角形 |
| IV | 2 , 4 | 1 , 3 | 2 | 1 , 3 , 2 不可構成三角形 |
| V | 1 , 4 | 2 , 3 | 3 | 2 , 3 , 3 可構成三角形 |
| VI | 2 , 3 | 1 , 4 | 1 | 1 , 4 , 1 不可構成三角形 |

三角形 S 的面積 $= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$

設 h 爲梯形的高度:

$\frac{1}{2} \times 3 \times h = 2\sqrt{2}$, $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$梯形的面積 $= \frac{1}{2} \times (1+4) \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

| | |
|---|---|
| 20 | [80] |

情況一 ：

某家庭的兩子與另一家庭的兩女結婚，則有 4 x 4 = 16 個組合。

情況二 ：

某家庭的兩子與來自兩個不同家庭的女子結婚，則有 8 x 8 = 64 個組合。

總數 = 16 + 64 = 80 。

21

[ (i) $A_3 = 6$

(ii) 1, 2, 3

(iii)

```
526     416     562     461
 34      35      14      25
  1       2       3       3 ]
```

因爲 $A_3 - B_3 = A_2$ 、 $A_2 - B_2 = A_1$ ，所以 $A_3 = A_1 + B_2 + B_3$ 。

注意到 $6 \ge A_3 = A_1 + B_2 + B_3 \ge 1+2+3=6$ 。由此可得 ：

(i) $A_3 = 6$ 及

(ii) $A_1, B_2, B_3$ 這三個數必定是 1, 2, 3。

(iii) 逐一考慮 $A_1, B_2, B_3$ 的 6 種不同排列可能 ：{1, 2, 3}、{1, 3, 2}、{2, 1, 3}、{2, 3,1}、{3, 1, 2}、{3, 2, 1}，不難發現其中兩個情況不可能發生，而其餘均可得出合理解如下 ：

```
526     416     562     461
 34      35      14      25
  1       2       3       3
```

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、吳端偉助理教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、馮德華老師、潘維凱老師、徐崑玉老師、徐鳳鳴老師