香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2008 – 2009

建議題解 Suggested Solutions

1. [1120cm^2]

設小長方形的長度爲 x cm。

因此小長方形的闊度 $= 2.5x$ cm。

∴長方形 ABCD 的周界 $= 17x$ cm

$\therefore 17x = 136$

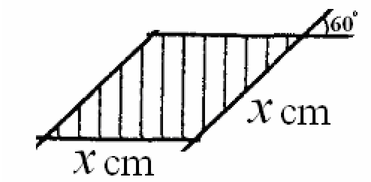
$x = 8$

所以長方形 ABCD 的面積

$=5 \times 8 \times 3.5 \times 8$

$=1120\text{cm}^2$

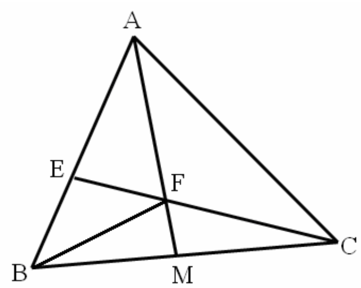
2. [$\frac{2}{\sqrt{3}}\text{cm}^2$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2$]



圖中陰影部分是一個菱形，因它的高是 1 cm，邊長 $x = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

所以陰影部分的面積 $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ cm^2 。

3. [4]



連接 BF。

ΔBMF 的面積 $= \Delta$CMF 的面積 及 ΔAMB 的面積 $= \Delta$AMC 的面積

即 ΔAFB 的面積$= \Delta$AFC 的面積 $= 6$

所以 ΔAEF 的面積 $= 6 \times \frac{2}{3} = 4$

4. [1809]

當抽出 800 個紅球，800 個黃球及 208 個藍球時，只要再抽出 1 個球就能保証在這些球中至少有 801 個球是同色的。

所以至少要抽出 800+800+208+1=1809 個球。

5. $[\frac{1}{2009}]$

設 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\Lambda+\frac{1}{2008}$ ，

原式= $(x+\frac{1}{2009})(1+x)-(1+x+\frac{1}{2009})x=\frac{1}{2009}$

6. [2008]

$x+\frac{1}{x}=3$ ，即 $x^2-3x+1=0$ ，

$x^4+3x^3-16x^2+3x+2009$

$=x^2(x^2-3x+1)+6x(x^2-3x+1)+(x^2-3x+1)+2008=2008$

7. [62]

要得分最低分的學生得分至少，其他學生得分就要盡量高，即首 22 名學生得分依次爲 99、98、97、…、78，

所以最低分至少是 $2009-\frac{22(78+99)}{2}=62$ 分。

8. [820 092]

數字能被 12 整除，即能被 3 整除及 4 整除，因 B 能被 4 整除，得 $b=2$ 或 6，

情況(i)：若 $b=2$ ，

因 B 能被 3 整除，即 $a+2+9+2=a+13$ 能被 3 整除，得 $a=2$ 、5 或 8，

$\therefore$ $B=220092$ 、 $B=520092$ 或 $B=820092$

情況(ii)：若 $b=6$ ，

因 B 能被 3 整除，即 $a+2+9+6=a+17$ 能被 3 整除，得 $a=1$ 、4 或 7，

$\therefore B=120096$ 、 $B=420096$ 或 $B=720096$

所以 B 的最大值是 820092。

9. [−5]

因 $(5x+1)^{2008}\geq 0$ 及 $\sqrt{(y-5)}\geq 0$ ，

$\therefore (5x+1)^{2008}=\sqrt{(y-5)}=0$ ，

$x^{2009}\times y^{2010}=(-\frac{1}{5})^{2009}\times 5^{2010}=-5$ 。

10. [11]

$x^2=(y-5)^2+(y-4)^2+\Lambda+y^2+(y+1)^2+\Lambda+(y+5)^2$

$x^2=11y^2+(25+16+9+4+1+1+4+9+16+25)$

$x^2=11(y^2+10)$

$\therefore y=1$ ，所以 x 的最小値是 11。

11. [245]

設該三班學生總人數爲 M 及若只分給 C 班學生，每人分得 x 枝鉛筆，

$\therefore \frac{42M}{105}+\frac{42M}{98}+\frac{42M}{x}=M$ ，得 $x=245$ 。

12. [9]

設小明的爺爺年齡爲 $10x+y$ ，其中 $9\geq x,y>0$ ，則爸爸的年齡是 $10y+x$ ，

$\therefore (10x+y)-(10y+x)=9(x-y)>0$

$\therefore x>y$ 及 $9>x-y>0$

又小明的年齡是 z ，則 $9(x-y)=4z$ ，

$\therefore x-y$ 必是 4 的倍數，即 $x-y=4$ 或 $x-y=8$ ，

情況(i)： $x-y=8$ ，即 $x=9$ ， $y=1$ ， $z=18$

即爺爺 91 歲、爸爸 19 歲、小明 18 歲 (不可能，捨去)

情況(ii)： $x-y=4$ ，即 $z=9$

所以小明 9 歲。(爺爺可以是 84 歲、爸爸 48 歲…)

13. [4.32 cm]

設水剛浸過該長方體形鐵塊時，圓柱體形容器的水高爲 H cm，

$(7\times 7\times \frac{22}{7}-6\times 9)\times 15.4=7\times 7\times \frac{22}{7}\times H$ $\qquad \therefore H=10$

現水高只有 8cm，所以水未能浸過該長方體形鐵塊。

設水未能浸過該長方體鐵塊時，水位升高 K cm，

$(7\times 7\times \frac{22}{7}-6\times 9)\times (K+8)=7\times 7\times \frac{22}{7}\times 8$ ， $\therefore K=4.32$

所以水位升高 4.32cm。

14. [-2007]

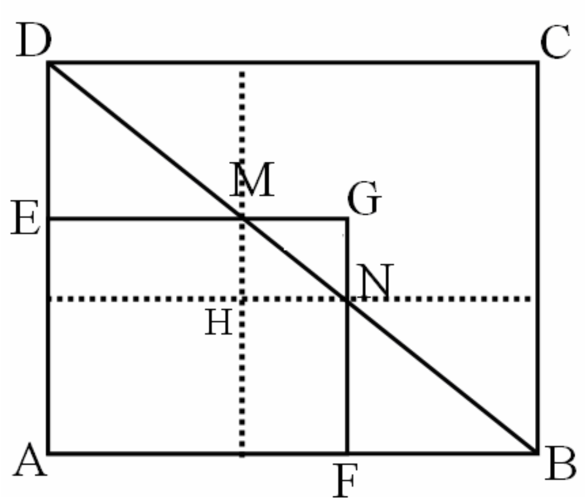
當 $x+2009=0$ ，$(x^2-x-1)\neq 0$ ，得 $x=-2009$;

當 $x^2-x-1=1$ ，$\therefore (x+1)(x-2)=0$ ，得 $x=-1$或 2;

當 $x^2-x-1=-1$ ，$\therefore x(x-1)=0$ ，$\therefore x=0$(不可能，捨去)或 1，得 $x=1$

所有根的總和$=-2009+2-1+1=-2007$

15. [162cm^2]



考慮長方形 GMHN，它的面積是 1+1=2 cm^2，

及長方形 AFGE 的面積是 1+49=50 cm^2。

$\therefore$長方形 GMHN 的面積：長方形 AFGE 的面積 = 1：25，

$\therefore$ MG：EM = 1：4 = MG：FB

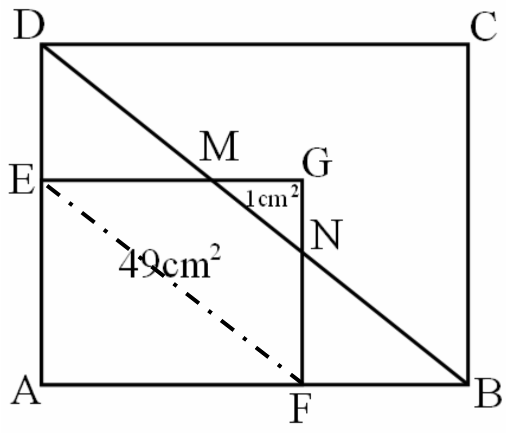
$\therefore$ GN：NF = 1：4 = GN：DE

$\therefore$ GN：DA= 1：9 = MG : AB

因此　長方形 GMHN 面積：長方形 ABCD 面積 = 1 : 81。

所以長方形 ABCD 的面積是 162 cm^2。

另解:



連接 EF.

$\Delta GMN \sim \Delta GEF$

ΔGEF 的面積是(1+49)/2 =25 cm^2。

$\therefore \Delta GMN$ 的面積： ΔGEF 的面積 = 1：25，

$\therefore \quad GM : ME = 1:4 = GN : NF$

因 $\Delta MED \sim \Delta MGN \sim \Delta BFN$

得 $ED = 4GN = FN$ ，$\therefore ED : AE = 4:5$ ，$\therefore AD : AE = 9:5$

同理，$\therefore AB : AF = 9:5$

因此長方形 ABCD 面積：長方形 AFGE 面積 = 81: 25

所以長方形 ABCD 的面積是 162 cm^2。

16. [-1]

	1^1	2^2	3^3	4^4	5^5	6^6	7^7	8^8	9^9	10^{10}
末位數字	1	4	7	6	5	6	3	6	9	0
	11^{11}	12^{12}	13^{13}	14^{14}	15^{15}	16^{16}	17^{17}	18^{18}	19^{19}	20^{20}
末位數字	1	6	3	6	5	6	7	4	9	0

$\therefore$最小的 20 項末位數字之和 = 94

(因$1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6+5+6+7+4+9+0=94$)

即每連續 20 項之和的末位數字是 4

$\therefore$最小的 1000 項之和的末位數字 = 0

最小的 1005 項之和的末位數字：因$0+1+4+7+6+5=23$ ，$M=3$

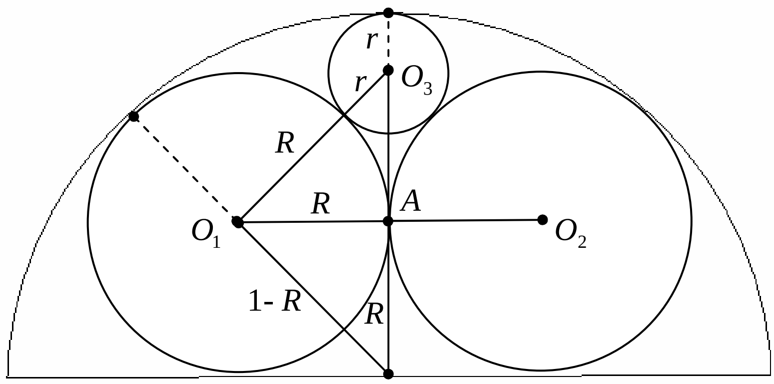
最大的 1004 項之和的末位數字：因$0+6+3+6+9=24$ ，$N=4$

所以$M-N=3-4=-1$

17. [2015]

366 及 365 除以 7 時，餘數分別爲 2 及 1。因爲 2012 爲潤年，而 7 = 1+1+2+1+1+1，所以下一個有關年份爲 2009+6=2015 年。

18. [$3-2\sqrt{2}$ cm]



設以 O_1 及 O_2 爲圓心的兩圓半徑爲 R，以 O_3 爲圓心的圓半徑爲 r。由對稱性，不難觀察到 $O_1O_2 \perp AO_3$ 。

根據畢氏定理，$R^2+R^2=(1-R)^2$ 及 $(R+r)^2=R^2+(1-R-r)^2$ 。

由此得 $R=\sqrt{2}-1$ 及 $R+r=2-\sqrt{2}$ 。

所以 $r=3-2\sqrt{2}$ cm

19. [3]

這次比賽只有 10 名參賽者，即最多只可能分成 10 隊。

若分成 10 隊，則各隊有只有 1 名參賽者，則共須比賽 $\frac{9\times 10}{2}=45$ 場，

而實際只進行了 31 場比賽，即減少了 $45-31=14$ 場比賽，故有有些隊伍的參賽者不只 1 名。

若其中 1 隊有 2 名參賽者，則比賽賽數相應地減少 1 場，

若其中 1 隊有 3 名參賽者，則比賽賽數相應地減少 $\frac{3\times 2}{2}=3$ 場，

若其中 1 隊有 4 名參賽者，則比賽賽數相應地減少 $\frac{4\times 3}{2}=6$ 場，

若其中 1 隊有 5 名參賽者，則比賽賽數相應地減少 $\frac{5\times 4}{2}=10$ 場，

若其中 1 隊有 6 名參賽者，則比賽賽數相應地減少 $\frac{6\times 5}{2}=15$ 場 (>14 場)，

由此可得每隊有不超過 5 名參賽者，
若只有 1 隊，比賽賽數 $=0$ (捨去)
若只有 2 隊，則每隊參賽者只能均為 5 名，賽數相應地減少 $10+10=20$ 場 (不是 14 場，捨去)
若只有 3 隊，則每隊參賽者的數目分別可能為 1+4+5 名、2+3+5 名、2+4+4 名、3+3+4 名，
賽數分別相應地減少 0+6+10=16(捨去)、$1+3+10=14$ 、$1+6+6=13$ (捨去) 及 $3+3+6=12$ (捨去)。
若超過 3 隊時，都不符合減少了場數為 14，故捨去。
所以這次比賽共有 3 隊代表隊參加 (各隊分別有 2、3 及 5 名參賽者)。

20. [381654729]

設該 9 位數為 $\overline{ABCDEFGHI}$ 。首先不難注意到以下數點：

1. E = 5；
2. B, D, F, H 必為偶數，故此 A, C, G, I 必為不等於 5 的奇數。
3. 因為 $\overline{ABC}$ 、$\overline{ABCDEF}$ 及 $\overline{ABCDEFGHI}$ 均被 3 整除，所以 $\overline{ABC}$ 、$\overline{DEF}$ 及 $\overline{GHI}$ 均被 3 整除。

其次考慮$\overline{DEF}$，直接測試可得 4 個可能性：258, 456, 654, 852。

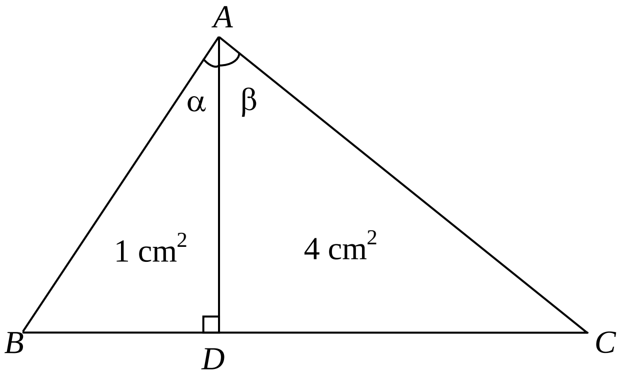
由於$\overline{ABCD}$可被 4 整除而 C 必爲奇數，所以只餘下 258, 654 兩個可能性。

分別考慮$\overline{ABC258}$ 及 $\overline{ABC654}$：

對於$\overline{ABC258}$，直接測試首 4 位的整除性，可得 4 個可能性：147258, 741258, 369258, 963258。進一步測試可知以上全都不成立。

對於$\overline{ABC654}$，重複以上過程可得 381654729 爲唯一解答。

21.



(a) 設上圖爲依題意所作之三角形。因爲 ΔABD 與 ΔADC 同高，所以

BD : DC = 1 : 4。設 BD = x cm，則 DC = 4x cm，$AD = \dfrac{2}{x}$ cm。

因爲 $\alpha+\beta>90°$，所以 $90°>\alpha>90°-\beta>0°$

由此， $\tan\alpha>\tan(90°-\beta)$

$$\tan\alpha>\frac{1}{\tan\beta} \;\Rightarrow\; \frac{x}{\frac{2}{x}}>\frac{\frac{2}{x}}{4x} \;\Rightarrow\; x>1$$

因此，任何符合上圖且 BD 長度大於 1cm 的作圖均爲合理解。

(b) [5cm、$\sqrt{5}$ cm 及 $2\sqrt{5}$ cm]

依題意，只需將(a)部各不等式改爲等式即可。即 $x=1$。運用畢氏定理，可知 ΔABC 的三邊長度分別爲 5cm、$\sqrt{5}$ cm 及 $2\sqrt{5}$ cm。