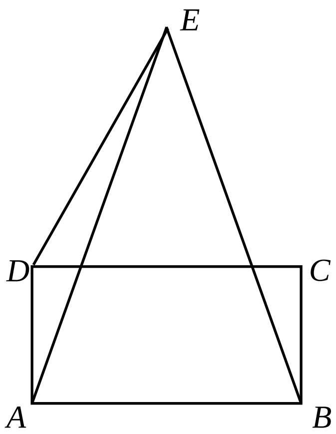
香港青少年數學精英選拔賽
The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest
2012 – 2013

甲部 **(每題 2 分)**

把答案填在答題紙所提供的位置。

1 圖中，$ABCD$ 是一個面積為 64 的長方形，及 $AE = BE$，求ΔADE 的面積。

In the figure, $ABCD$ is a rectangle of area 64 and $AE = BE$, find the area ofΔADE.



2 一個正六面體有 12 條棱。那麼，一個正十二面體有多少條棱？

A cube has 12 edges. How many edges does a regular dodecahedron have?

3 利用 2、0、1 及 3 這四個數字，而每個數字不可重複使用，則可組成一些不同的 4 位數。求該些 4 位數的總和。

From the digits 2, 0, 1 and 3, when each digit cannot be used repeatedly, different 4-digit numbers are formed. Find the sum of all these 4-digit numbers.

4. 設數列$\{a_n\}$滿足 $a_1 = x > 0$，及 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 當 $n \geq 1$。若 $a_{2012} = \dfrac{1}{2013}$ ，求 x 的值。

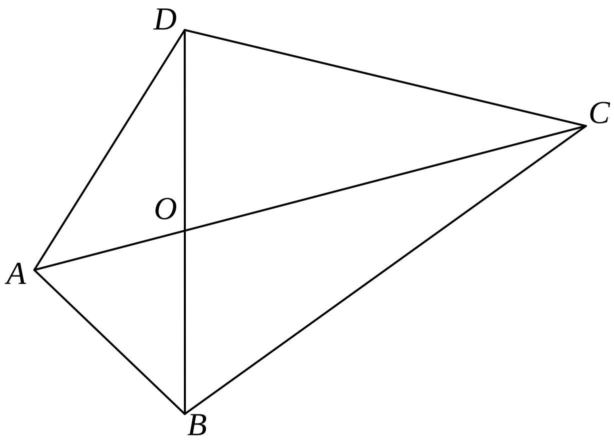
Consider a sequence $\{a_n\}$ such that $a_1 = x > 0$， and $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ where $n \geq 1$.

If $a_{2012} = \dfrac{1}{2013}$, find the value of x.

5. 已知 a 為質數，b 及 c 為大於 1 的整數，若 $ab^b c + a = 2013$ ，求 a、b 及 c 的值。

It is given that a is a prime number; b and c are integers greater than 1, if $ab^b c + a = 2013$, find the values of a, b and c.

6. 圖中，$ABCD$ 為一個凸四邊形，對角線 AC 及 BD 相交於點 O，且 ΔOAD 的面積 $= 8$ 及 ΔOBC 的面積 $= 18$。若 $ABCD$ 的面積為 M，求 M 的最小值。
In the figure, $ABCD$ is a convex quadrilateral , its diagonals AC and BD meet at point O, the area of $\Delta OAD = 8$ and the area of $\Delta OBC = 18$. If the area of $ABCD$ is M, find the minimum value of M.



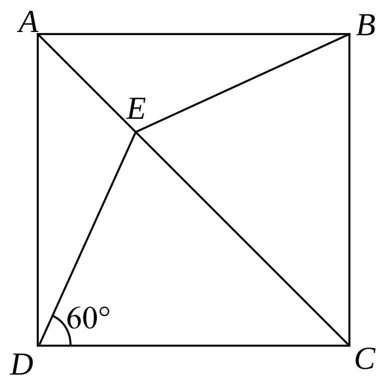
7. 已知 α 為 2013 的正因子，並能被 3 整除。求所有α 不同可能值的積。(答案以指數表示。)
It is given that α is a positive factor of 2013 and is divisible by 3. Find the product of all the distinct possible values of α. (Give your answer in index form.)

8. 已知 a、b、c、d 及 m 是五個不同的整數，且 $a+b+c+d=16$ 及 m 比 a、b、c、d 的值大。若 $(m-a)(m-b)(m-c)(m-d)=2013$ 及 $m>0$，求 m 的值。
It is given that a, b, c, d and m are five different integers, $a+b+c+d=16$ and m is greater than each of the values of a, b, c and d. If $(m-a)(m-b)(m-c)(m-d)=2013$ and $m>0$, find the value of m.

9. 圖中，$ABCD$ 是一個正方形，E 為對角線 AC 上的一點及$\angle EDC = 60°$。
求$\dfrac{\Delta ADE\text{ 的面積}}{\Delta BEC\text{ 的面積}}$。(答案可以根式表示。)

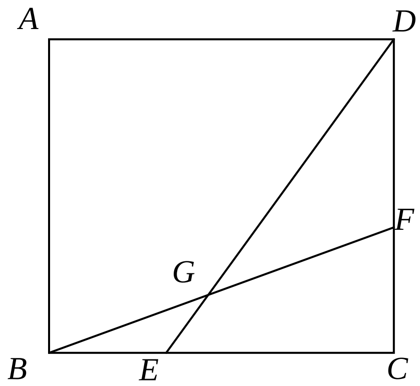
In the figure, $ABCD$ is a square and E is a point on the diagonal AC and $\angle EDC = 60°$.

Find $\dfrac{\text{Area of } \Delta ADE}{\text{Area of } \Delta BEC}$. (You can leave your answer in surd form.)



10 圖中，$ABCD$ 是一個正方形。E 與 F 分別為 BC 與 CD 上的點使得 $BE = CF = \dfrac{1}{3}AB$，BF 與 DE 相交於 G。求$\dfrac{ABGD\text{ 的面積}}{ABCD\text{ 的面積}}$。

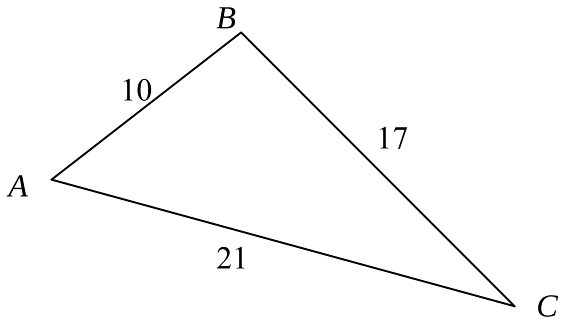
In the figure, $ABCD$ is a square. E and F are points on BC and CD respectively such that $BE = CF = \dfrac{1}{3}AB$, BF and DE intersect at G. Find $\dfrac{\text{Area of } ABGD}{\text{Area of } ABCD}$.



11. 若 $mn = 3m + 5n$，其中 m、n 為正整數，求 $m + n$ 的最小值。
If $mn = 3m + 5n$, where m、n are positive integers, find the minimum value of $m + n$.

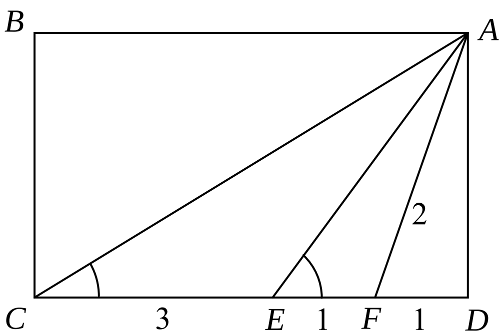
12. 若 $2012^3 \times 2013^3 = a \times 10^p$ ，其中 p 為正整數，且 $1 \le a < 10$ ，求 p 的值。
If $2012^3 \times 2013^3 = a \times 10^p$, where p is a positive integer and $1 \le a < 10$, find the value of p.

13. 圖中，$AB = 10$、$BC = 17$ 及 $AC = 21$。求ΔABC 的面積。
In the figure, $AB = 10$, $BC = 17$ and $AC = 21$. Find the area of ΔABC.



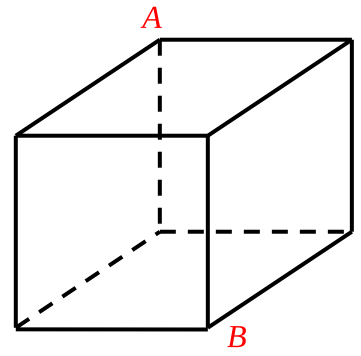
14. 把一條長度為 2013 cm 的線扭曲造成一個長度為 x cm、 y cm 及 z cm 的三角形，使得 x、y 及 z 為整數，及 $x < y < z$ ，且 z 必須為盡量大。
問可以造成多少個三角形？
A wire of length 2013 cm is bent to form a triangle with lengths x cm, y cm and z cm, so that x, y and z are integers , $x < y < z$ and z has to be maximized.
How many possible triangles can be formed?

15. 圖中，$ABCD$ 為長方形，其中 $AF = 2$，$CE = 3$ 及 $EF = FD = 1$。
若$\angle ACD + \angle AED = x°$ ，求 x 的值。
In the figure, $ABCD$ is a rectangle, where $AF = 2$、$CE = 3$ and $EF = FD = 1$。
If $\angle ACD + \angle AED = x°$, find the value of x.



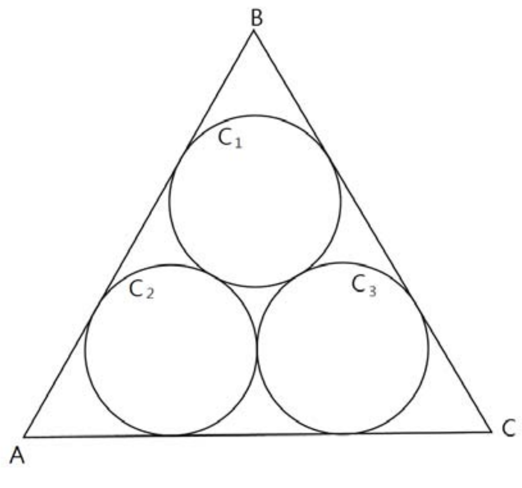
16. 圖中，AB 為一個正方體的對角線。若 $AB=4$ cm，且該正方體的總表面面積為 x cm^2，求 x 的值。

In the figure, AB is a diagonal of the cube. If $AB=4$ cm and the total surface area of the cube is x cm^2，find the value of x.



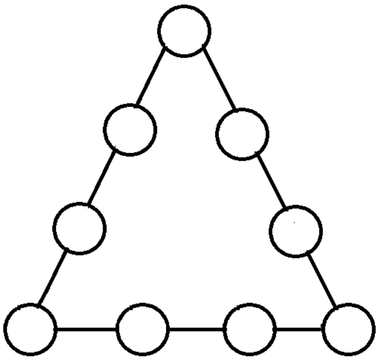
17 圖中，ΔABC 是一個邊長為 1 的等邊三角形。其中 C_1、 C_2 及 C_3 為三個彼此相接的圓，且每個圓均與該三角形的兩條邊相接，求每個圓的半徑。

In the figure, ΔABC is an equilateral triangle with side of unit length. C_1, C_2 C_3 are circles inside the triangle, each of which touches two sides and the other two circles. Find the radius of each circle.



18 將整數 1 至 9 分別填入圓圈內使得三角形每邊的數字和等如 20。

Put the integers 1 to 9 in the circles in the figure below so that each side of the triangle adds up to 20.



乙部 **(每題 6 分)**

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

19 2013 這個數字有着一個特性，就是它的非零數字的和與積是一樣的。

(a) 由 1000 至 9999 的正整數中，有多少個數字有着同一個特性？

(b) 從 (a) 部分的正整數，試舉一例

(i) 它恰好有三個零；

(ii) 它恰好有二個零；

(iii) 它恰好有一個零；

(iv) 它沒有任何零。

2013 enjoys the property that the sum and product of its nonzero digits are the same.

(a) How many positive integers from 1000 to 9999 enjoy this same property?

(b) Give one example of such a positive integer in part (a) with

(i) exactly three zeros,

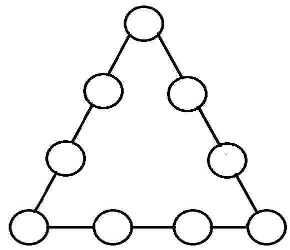
(ii) exactly two zeros,

(iii) exactly one zero,

(iv) no zero.

20 以下的遊戲，供兩個參與者一起參與。每一個參與者會輪流將數字 1、2、3、…、9 分別填入下圖的圓圈內 (每個數字只可使用一次)，首先使得三角形的其中一邊的數字和等如 20 的人贏得此遊戲。試証明這個遊戲對其中一個參與者來說是有必勝策略的，及說明這個參與者的必勝策略。

Consider the following game which is played by two players. Each player takes turns to put down 1,2,…,9 into one of the nine empty circles below (each number can only be used once). The winner is the first one who can make one edge of the above triangle having a sum equals 20. Show that one of the two players has a winning strategy and describe explicitly a winning strategy of this player.



21 以 $n!$ 表示 $n\times(n-1)\times\cdots\times 1$。
設 $M = 1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times 6! \times 7! \times 8! \times 9!$ 。問 M 有多少個因子是完全平方數 ?

Denote $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$. Let $M = 1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times 6! \times 7! \times 8! \times 9!$.
How many factors of M are perfect square numbers?

~ End of paper 全卷完 ~

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、
郭家強老師、馮德華老師、徐崑玉老師、鄭永權老師、潘維凱老師