

香港青少年數學精英選拔賽  
The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest  
2006 – 2007

時限：兩小時

Time allowed: 2 hours

除特別指明外，數值答案應用真確值表示。

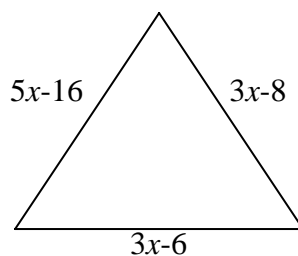
Unless otherwise specified, numerical answers should be exact.

甲部Part A

把答案填在答題紙所提供的位置。

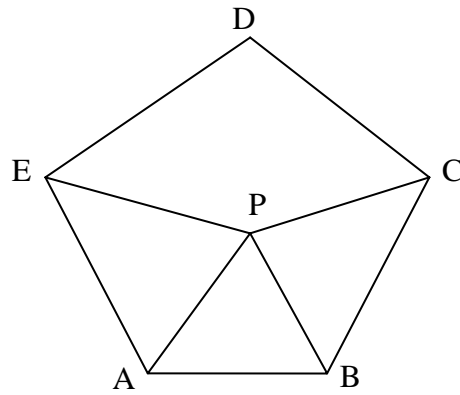
Write the answers on the spaces provided in the answer sheet.

1. If  $x$  and  $y$  are positive integers, find the number of integers between  $x(y + 2007)$  and  $xy$ ?  
若  $x$  和  $y$  是正整數，求  $x(y + 2007)$  與  $xy$  之間的正整數數目。
2. If  $a$  and  $b$  are real numbers such that  $a + b < 0$ ,  $ab < 0$  and  $a < b$ , arrange  $a$ ,  $-a$ ,  $b$  and  $-b$  in ascending order of magnitude.  
若  $a$  及  $b$  為實數，且  $a + b < 0$ ,  $ab < 0$  及  $a < b$ , 請將  $a$ 、 $-a$ 、 $b$  及  $-b$  由小至大排列。
3. If  $x$  and  $y$  are two numbers such that their sum, product and quotient are all equal, find  $x + y$ .  
若  $x$ 、 $y$  兩數的和、積及商全部相等，求  $x + y$ 。
4. If  $\sqrt{7\sqrt{n-5} - n}$  is an integer, find the smallest possible value of integer  $n$ .  
如  $\sqrt{7\sqrt{n-5} - n}$  是一整數，求整數  $n$  的最小可能值。
5. The mean, median and mode of five integers are 77, 87 and 97 respectively. If their range is 47, find the second smallest of these five integers.  
5 個整數的平均數、中位數及眾數分別為 77、87 及 97。  
若它們的分佈域為 47，求該 5 個整數中的第二最小值。
6. If the length of the three sides of an isosceles triangle are  $(3x - 6)$ ,  $(3x - 8)$  and  $(5x - 16)$ , find all the possible value(s) of  $x$ .



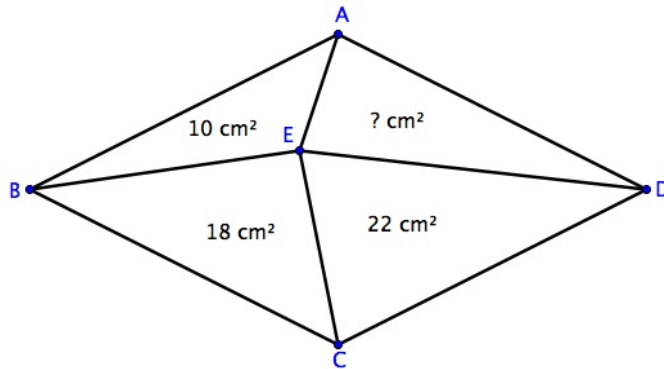
若一等腰三角形的三條邊長為  $(3x-6)$ 、 $(3x-8)$  及  $(5x-16)$ , 求  $x$  所有可能的值。

7. If  $P$  is a point inside a regular pentagon  $ABCDE$  and  $\triangle APB$  is an equilateral triangle, find  $\angle CPE$ .



若  $P$  為正五邊形  $ABCDE$  內的一點，且  $\triangle APB$  為一等邊三角形，求  $\angle CPE$ 。

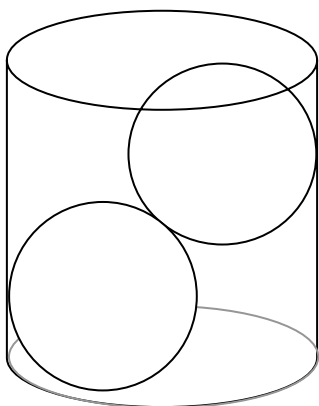
8. If  $P$  is a point inside a rhombus  $ABCD$ , the areas of  $\triangle ABE$ ,  $\triangle BCE$  and  $\triangle CDE$  are  $10 \text{ cm}^2$ ,  $18 \text{ cm}^2$  and  $22 \text{ cm}^2$  respectively, find the area of  $\triangle DAE$ .



若  $P$  為菱形  $ABCD$  內的一點，且  $\triangle ABE$ 、 $\triangle BCE$  和  $\triangle CDE$  的面積分別是  $10 \text{ cm}^2$ 、 $18 \text{ cm}^2$  和  $22 \text{ cm}^2$ ，求  $\triangle DAE$  的面積。

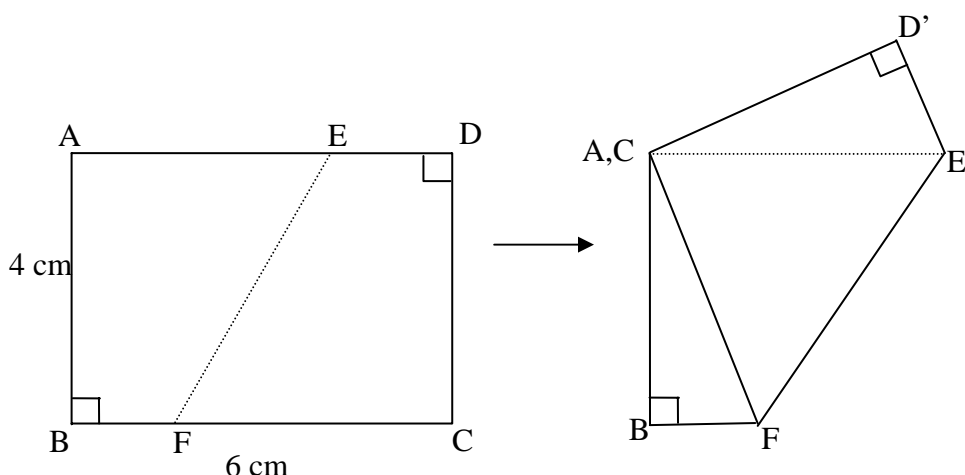
9. It is given that  $a$  is a prime number and  $b$  is an odd number.  
If  $a^2 + b^2 = 125$  and  $b > 0$ , find  $a$  and  $b$ .  
已知  $a$  為一質數及  $b$  為一奇數，若  $a^2 + b^2 = 125$ ，且  $b > 0$ ，求  $a$  和  $b$ 。
10. It is given that  $2007! = 2007 \times 2006 \times 2005 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ .  
How many trailing zeros are there in  $2007!$ ?  
已知  $2007! = 2007 \times 2006 \times 2005 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ ，  
請問  $2007!$  的結尾有多少個零？
11. If  $\begin{cases} 2a^2 + 2007a + 3 = 0 \\ 3b^2 + 2007b + 2 = 0 \end{cases}$  and  $ab \neq 1$ , find  $\frac{a}{b}$ .  
若  $\begin{cases} 2a^2 + 2007a + 3 = 0 \\ 3b^2 + 2007b + 2 = 0 \end{cases}$  且  $ab \neq 1$ ，求  $\frac{a}{b}$ 。

12. Two identical spheres are fitted in a cylindrical vase. The two spheres touch the side, the top and the base of the cylindrical vase as shown. If the diameter and the height of the vase are 16 cm and 18 cm respectively, find the radius of the sphere.



兩個相同大小的球體剛好能放進一圓柱形的容器中，且兩球體分別與該圓柱形容器的側面、頂部及底部相接(如圖)。若圓柱的底直徑及高分別為 16cm 及 18cm，求球體的半徑。

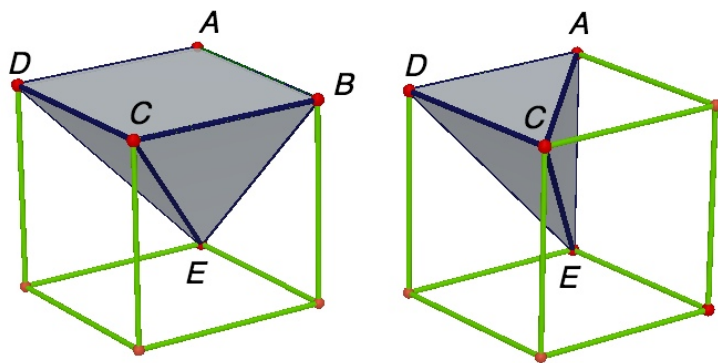
13. A rectangular thin paper  $ABCD$  is folded along the line  $EF$  so that vertex  $C$  meets vertex  $A$  and vertex  $D$  comes to the position  $D'$  as shown in the figure. If  $AB = 4$  cm and  $BC = 6$  cm, find the area of  $\triangle AEF$ .



將一矩形薄紙片  $ABCD$  沿  $EF$  摺疊，使點  $C$  和點  $A$  重合及點  $D$  移至點  $D'$  的位置(如圖)。若  $AB = 4$  cm 及  $BC = 6$  cm，求  $\triangle AEF$  的面積。

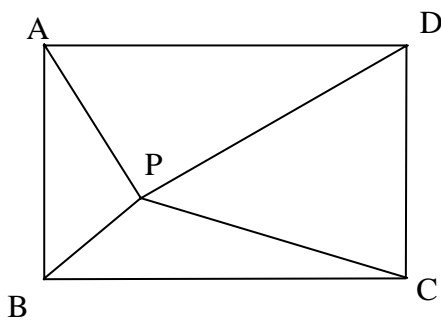
14. The product of three prime numbers is seven times their sum. Find the three prime numbers.  
三個質數的積是它們的和的七倍。  
求該三個質數。
15. Po Leung Association provides dormitory for a certain number of students. If every room accommodates 4 students, 30 of the students will have no offer. If every room accommodates 9 students, one of the rooms will not be full. Find the number of rooms provided and the total number of students needed to be accommodated.  
保良會為住宿學生安排房間，若每房間住 4 人，則有 30 人無法入住，若每房間住 9 人，則只有一間房間仍有空位，求這宿舍的房間數目及住宿學生人數。

16. Pyramid  $E-ABCD$  and pyramid  $E-ACD$  are formed with vertices from two identical cubes. If the surface area of pyramid  $E-ACD$  is  $\sqrt{8} \text{ cm}^2$ , find the surface area of the pyramid  $E-ABCD$ .



棱錐  $E-ABCD$  和棱錐  $E-ACD$  是由兩個相同的正立方體的頂點形成。且棱錐  $E-ACD$  的表面面積是  $\sqrt{8} \text{ cm}^2$ ，求棱錐  $E-ABCD$  的表面面積。

17.  $P$  is a point inside rectangle  $ABCD$ . If  $PA = 5\text{cm}$ ,  $PB = 2\text{cm}$  and  $PC = 10\text{cm}$ , find the length of  $PD$ .



$P$  是矩形  $ABCD$  內的一點。若  $PA = 5\text{cm}$ ， $PB = 2\text{cm}$  和  $PC = 10\text{cm}$ ，求  $PD$  的長度。

18. Different groups of three two-digit numbers are formed from 1, 2, 3, 4, 5 and 6 with each digit used exactly once. Add the three two-digit numbers in each group. Write down all attainable sums. (For example, since  $12 + 34 + 56 = 102$ , 102 is one of such attainable sums.)

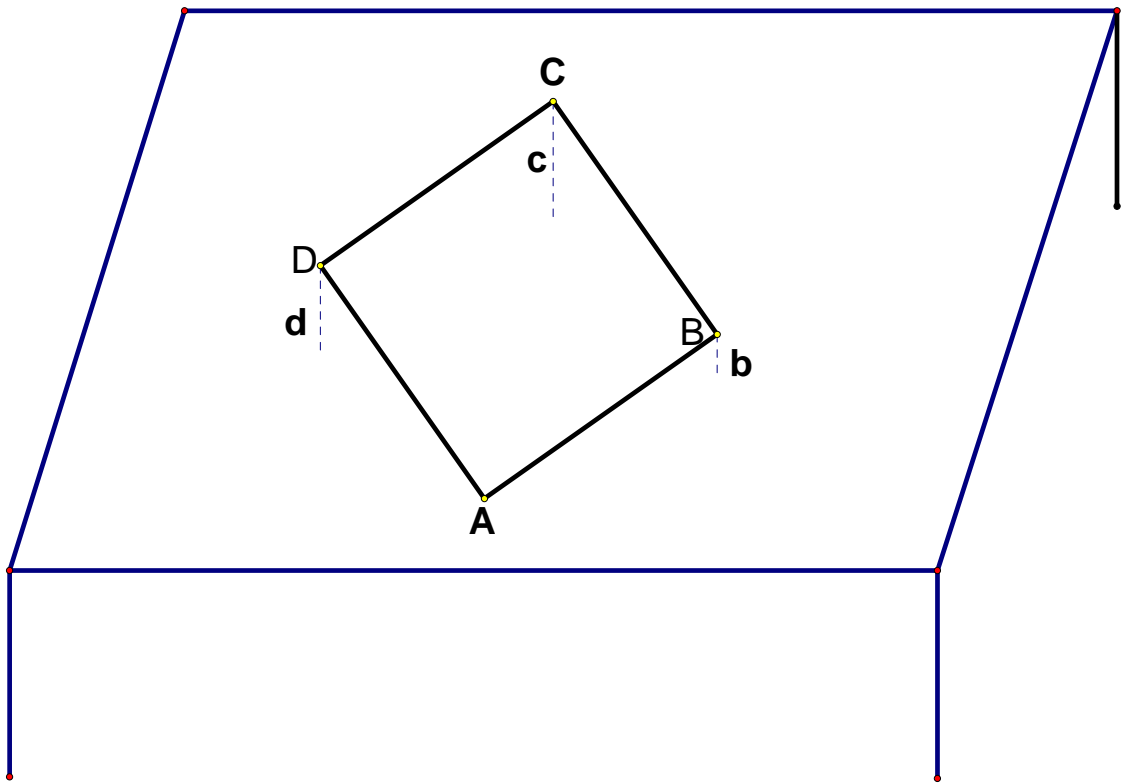
數字 1、2、3、4、5 及 6 可組成不同組合的三個兩位數，且每個數字恰好用一次。把每組合的三個兩位數相加，寫出全部由此得到的和。（例如，因為  $12 + 34 + 56 = 102$ ，所以 102 是其中一個得到的和。）

乙部 Part B

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

Answer the following questions with full solutions on the spaces provided in the answer sheet.

- 19 There is a uniform rectangular thin cardboard ABCD placed on a table. As shown in the diagram below, when corner C is lifted, the corners B and D will also be lifted with corner A fixed on the table. Let the heights of the three corners B, C and D from the table be  $b$ ,  $c$  and  $d$  respectively, where  $b < d < c$ . Prove that  $c = b + d$ .

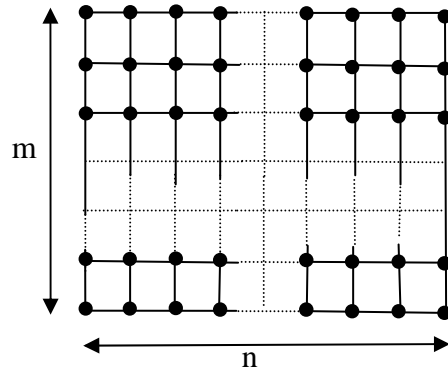


一塊重量均勻而薄的長方形硬卡紙 ABCD 平放於枱面。如圖所示，當角 C 被提起時，角 B 和角 D 也隨之而升高，而角 A 則仍固定在枱上（如上圖所示）。設角 B、角 C 和角 D 距離枱面的高度分別是  $b$ 、 $c$  和  $d$ ，且  $b < d < c$ ，試證明  $c = b + d$ 。

20. Write one '1', followed by two '2's, three '3's, four '4's, ten '10's, eleven '11's, twelve '12's, and so on. What is the digit in the 2007th position?

先寫一個 '1'，接著寫兩個 '2'、三個 '3'、四個 '4'、... 十個 '10'、十一個 '11'、十二個 '12'、餘類推。第 2007 位的數字是什麼？

21. There are  $m \times n$  houses at the junctions of an  $m \times n$  rectangular grid of roads. If one of the householders wants to visit every other house just once and return to his own house, find the conditions on  $m$  and  $n$ ?



有  $m \times n$  間屋位於  $m \times n$  矩形的格點上，相連兩格點的直線是一條路。如果其中一屋主希望可以從自己的屋出發，沿路走遍其他每一間屋，而每一間屋只經過一次，再回到起點，求  $m$  和  $n$  的條件。

- End of Paper -  
- 全卷完 -

擬題委員會：

香港數理教育學會數學組委員：李文生先生、馮德華老師、徐崑玉老師、徐鳳鳴老師  
顧問：蕭文強教授(香港大學)、吳端偉助理教授(香港大學)