

香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2000 - 2001

時限：兩小時

Time allowed: 2 hours

除特別指明外，數值答案應用真確值表示。

Unless otherwise specified, numerical answers should be exact.

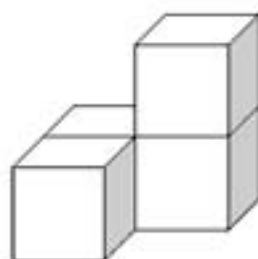
甲部 Part A

把答案填在答題紙所提供的位置。

Write the answers on the spaces provided in the answer sheet.

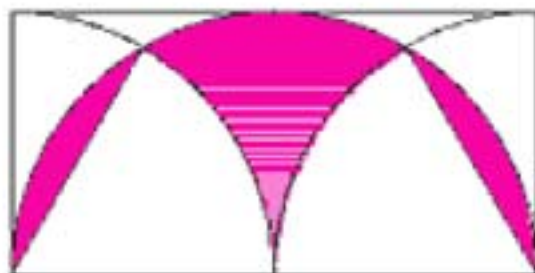
1. 圖中的物體是由四塊全等的正方體組成，物體的體積是 4 cm^3 ，求這個物體的總表面面積（以 cm^2 為單位）。

The solid in the figure is composed of 4 identical cubes. The volume of the solid is 4 cm^3 . Find the total surface area of the solid in cm^2 .



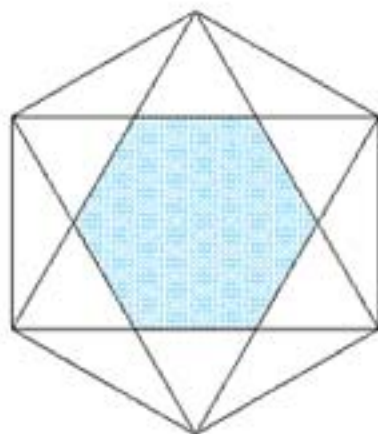
2. 圖示一個 $2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ 的長方形，內有一個半圓及兩個四分之一圓，若陰影部份的面積是 $\pi x \text{ cm}^2$ ，求 x 。

The figure shows a semi-circle and 2 quarters of circle inside a $2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ rectangle. If the total area of the shaded part is $\pi x \text{ cm}^2$, find x .



3. 若圖中陰影部份的正六邊形的面積是 5 cm^2 ，求圖中較大正六邊形的面積（以 cm^2 為單位）。

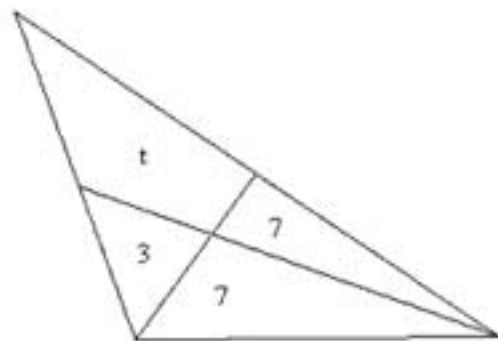
If the area of the shaded regular hexagon is 5 cm^2 , find the area of the large regular hexagon in cm^2 .



4. 求 $\sqrt[64]{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\dots(2^{64}+1)+1}$ 的值。

Find the value of $\sqrt[64]{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\dots(2^{64}+1)+1}$

5. 圖中三角形分成四個區域而各區域面積如圖示，求區域 t 的面積。



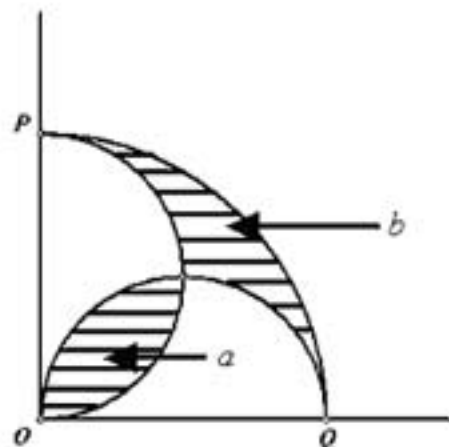
Determine the area of the region t in the diagram, given that the areas of the other three triangles are as indicated.

6. 圖中 OPQ 是圓形的一個象限， OP 和 OQ 是兩個半圓的直徑，陰影部份分別是面積 a 和面積 b 。

求比例 $\frac{a}{b}$ 。

OPQ is a quadrant of a circle. OP and OQ are diameters of two semi-circles as shown in the diagram. Areas a and b are shaded.

Find the ratio $\frac{a}{b}$.



7. 若一個直角三角形的兩條邊分別是 5 單位和 12 單位長，則第三條邊的長度最少是多少？

If the lengths of two sides of a right-angled triangle are 5 and 12, what is the least possible length of the third side?

8. 若 n 是任意正整數，定義 $E(n)$ 為所有 n 的單數位數的和；例如， $E(1547) = 1 + 5 + 7 = 13$ 。

(a) 求 $E(23046)$ 和 $E(102)$ ；

(b) 求 $E(1) + E(2) + E(3) + \Lambda + E(98) + E(99)$ 。

For any positive integer n , $E(n)$ represents the sum of all the odd digits of n .

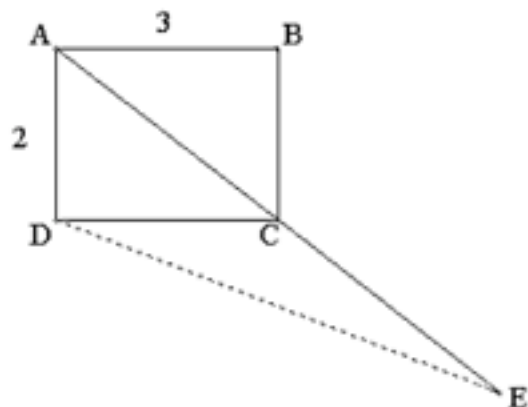
e.g. $E(1547) = 1 + 5 + 7 = 13$.

(a) Evaluate $E(23046)$ and $E(102)$.

(b) Evaluate $E(1) + E(2) + E(3) + \Lambda + E(98) + E(99)$.

9. $ABCD$ 是一個長方形，把對角線 AC 延長至 E 以使 $CE = AC$ ，求 DE 的長度。

$ABCD$ is a rectangle. The diagonal AC extend to a point E such that $CE = AC$. Find the length of DE .



10. 沒有重複地使用數字 0、1、2、3 及 4 組成三位數，共可組成多少個三位數？
How many three-digit numbers can be formed from the digits 0, 1, 2, 3 and 4 if no repetitions are allowed?

11. 若「&」被定義為 $a \& b = b^a + a^b$ ，求 $(2 \& 3) \& 2$ 。

If “&” represents an operation defined as $a \& b = b^a + a^b$, find $(2 \& 3) \& 2$.

12. 求 3^{33} 的個位數。

Determine the units digit in 3^{33} .

13. 把以下的數由小至大排列： 2^{800} 、 3^{600} 、 5^{400} 、 6^{200} 。

List these numbers in increasing order: 2^{800} , 3^{600} , 5^{400} , 6^{200} .

14. 上升數列 2、3、5、6、7、10、11、…… 是由所有不是正整數的平方或立方的正整數組成，求這個數列的第二百項。

The increasing sequence 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ... consists of all positive integers that are neither the square nor the cube of a positive integer. Find the 200th term of this sequence.

15. 有四條線段 a 、 b 、 c 及 d 而長度分別是 16、13、10 及 6 單位，用這些線段構作四邊形以使 a 與 c 平行，共可構作多少個不同的四邊形？

The length of segments a , b , c , d are 16, 13, 10, and 6 respectively. Use these segments to construct quadrilateral such that side a parallel to side c . How many different quadrilaterals can be constructed?

16. 若實數 x 、 y 及 z 符合 $3^x = 4^y = 12^z$ ，求 $\frac{z}{x} + \frac{z}{y}$ 的值。

If x , y , z are real numbers such that $3^x = 4^y = 12^z$, find the value of $\frac{z}{x} + \frac{z}{y}$.

17. 求 $\sqrt{\overset{4002\text{位}}{11\Lambda 1} - \overset{2001\text{位}}{22\Lambda 2}}$ 的值。

Evaluate $\sqrt{\overset{4002\text{digits}}{11\Lambda 1} - \overset{2001\text{digits}}{22\Lambda 2}}$.

Part B (乙部)

1. 求所有正整數 n 以使 $n^3 + n - 4$ 可被 $n - 4$ 整除。
Find all positive integers n such that $n^3 + n - 4$ is divisible by $n - 4$.
2. 用兩條弦和兩個圓形把一個單位圓分成八個相等面積的區域；證明你的解法。
Divide a unit circle into eight regions of equal area by using two chords and two other circles. Justify your assertion.
3. 若 $(2^a + 1)(4^b + 1) = 3^c + 1$ ，而 a 、 b 及 c 是三個不同的非負整數，求 a 、 b 及 c 的和的最小值；證明你的解法。(提示： $3^c + 1$ 是否永遠是雙數？)
If $(2^a + 1)(4^b + 1) = 3^c + 1$, and a , b , and c are all different non-negative integers, find the smallest sum of a , b , and c . Justify your assertion. (Hint: Is $3^c + 1$ always even?)