第二十八屆香港青少年數學精英選拔賽

The 28th Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2025 – 2026 (31 / 1 / 2026)

題解 Solution

甲部 (每題 2 分)

1. [526]

   編號 501 的大廈之前有 500 棟大廈，即編號 2026 的大廈之前亦有 500 棟大廈，因 此，該街道　兩旁共有 2026+500=2526 棟大廈，即每面 2526/2=1263 棟大廈。

   編號 2001 的大廈在 2026 的一面。

   由編號 1264 至 2001 的大廈有 2001-1264+1=738 棟大廈。

   因此，編號 2001 的大廈對面是編號(1263-738+1)=526 的大廈。

   [另解：設編號 2001 的大廈對面是編號 N。2026-2001=N-501，即 N=2026-2001+501=526]

2. [4108729]

   $2026^{2026} = (2 \times 1013)^{2026}$

   $2^0 \times 1013^0$、$2^0 \times 1013^1$、…、$2^0 \times 1013^{2026}$、

   $2^1 \times 1013^0$、$2^1 \times 1013^1$、…、$2^1 \times 1013^{2026}$、

   ………

   $2^{2026} \times 1013^1$、$2^{2026} \times 1013^1$、…、$2^{2026} \times 1013^{2026}$等都是$2026^{2026}$的因數，因此，$2026^{2026}$可以被 2027×2027= 4108729 個正整數整除。

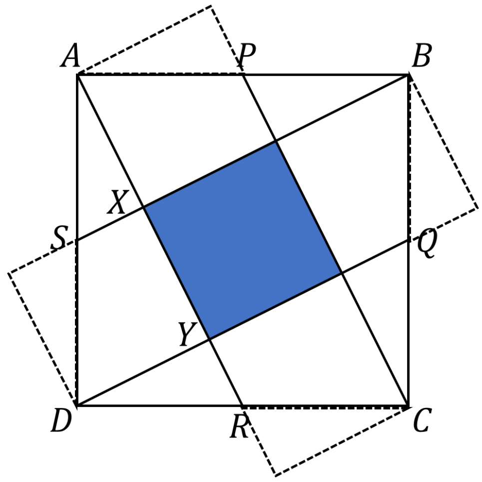
3. [84]

   解集的數量 $= \frac{(10-4+3)!}{(10-4)!3!}$

   $= \frac{9!}{6!3!} = 84$

4. [80]

   設AR交BS於X、交DQ於Y。由於$AS = SD$及$SX//DY$，根據中點定理可知$AX = XY$及$DY = 2SX$。根據旋轉對稱性可得$AX = DY$。將ΔASX沿S旋轉$180°$，跟$SXYD$合併，可得一正方形，且等同於陰影區域。對四邊重覆此操作，可將$ABCD$化成由五個等同的正方形所構成的十字形，當中每個面積為16。因此$ABCD$面積為$16 \times 5 = 80$。



5. [6997]

9 ×1 + 90×2 + 900×3 + (2026 – 999)×4 = 6997

6. [7]

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\cdots\frac{1}{x+2025}-\frac{1}{x+2026}=\frac{2026}{14231}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2026}=\frac{2026}{14231}$$

$$x=7 \text{ 或 } x=-2033 \text{ (捨去)}$$

因此, $x = 7$

7. [4]

設正方形邊長為l，則其對角線為$\sqrt{2}l$。設一組對邊上的線段長度為x, y，則其對應的兩個等腰直角三角形高分別為$\frac{x}{2}, \frac{y}{2}$。從而得知：

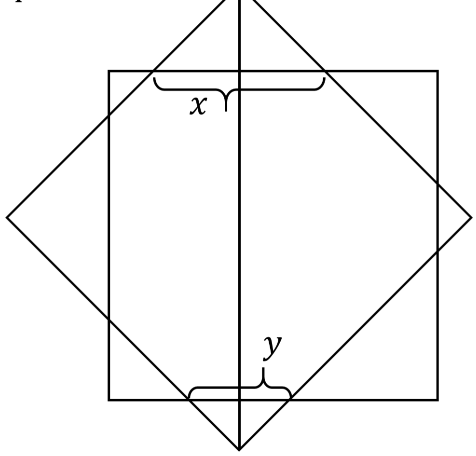
$\sqrt{2}l=\frac{x}{2}+l+\frac{y}{2}$ $\qquad \therefore x+y=2(\sqrt{2}-1)l$

這證明$x+y$為不變量，跟兩正方形的相對位置無關。另一組對邊上的線段同遵此理。

因此有：

$AB+EF=CD+GH$

$EF=CD+GH-AB=7+5-8=4$



8. $[\frac{1}{8}]$

邊長為 1 的等邊三角形 $= 9$
邊長為 $\sqrt{3}$ 的等邊三角形 $= 2$
邊長為 2 的等邊三角形 $= 3$
邊長為 3 的等邊三角形 $= 1$
可形成的等邊三角形總數 $= 15$

三點組合的總數 $= \binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{2\times3} = 120$

P(形成等邊三角形)$= \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$

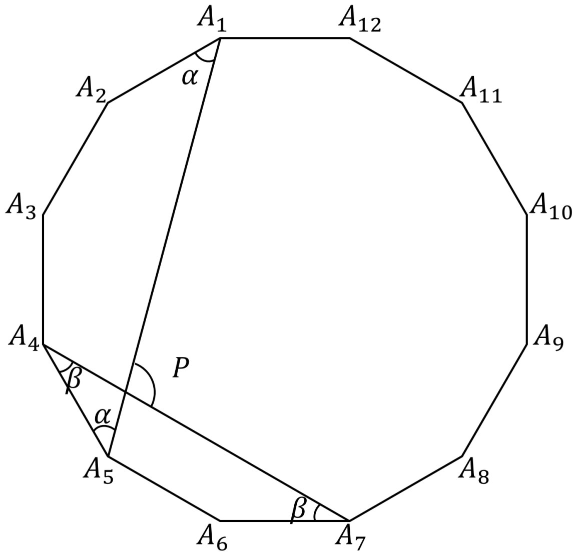
9. [8]

設 $k(45-n) = 9n+2, k$ 為正常數，得 $n = \frac{45k-2}{k+9} = 45 - \frac{407}{k+9}$

當 $k+9=1$ ， $n = -362$ (捨去)
當 $k+9=11$ ， $n = 8$
當 $k+9=37$ ， $n = 34$
當 $k+9=407$ ， $n = 44$
因此，n 的最小值是 8。

10. [105°]

十二邊形的內角為$180^\circ \times (12-2) \div 12 = 150^\circ$。根據對稱性，設$\angle A_4A_5A_1 = \angle A_2A_1A_5 = \alpha$及 $\angle A_5A_4A_7 = \angle A_6A_7A_4 = \beta$。
考慮五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$，可得：
$2\alpha + 3(150^\circ) = (5-2)180^\circ \qquad \therefore \alpha = 45^\circ$
考慮梯形$A_4A_5A_6A_7$，可得：
$2\beta + 2(150^\circ) = (4-2)180^\circ \qquad \therefore \beta = 30^\circ$
透過三角形外角以及直線上的鄰角可得：
$\angle A_1PA_7 = 180^\circ - \alpha - \beta = 105^\circ$



11. [3980]

因任意三個相鄰格子中所填寫數字之和相等，所以周期為 3。

第 1、2、3 格數字之和等於第 2、3、4 格寫數字之和，得 $a = 20$。

第 4、5、6 格數字之和等於第 5、6、7 格寫數字之和，得第 7 格是 a。

同理，得第 10、13、16 格是 a。

a			20			a	b		a	b	26	a	b		a	c

因第 8 格是 b，得第 11、14、17 格都是 b。即 $c = b$。

由 $b + 26 + a = 2026$，得 $b = 1980$ 及 $c = 1980$。

因此，$a + b + c = 20 + 1980 + 1980 = 3980$。

12. [1017]

$ab - (a + b) = 2025$

$ab - a - b + 1 = 2026$

$(a - 1)(b - 1) = 2026$

$\begin{cases} a - 1 = 1 \\ b - 1 = 2026 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a - 1 = 2026 \\ b - 1 = 1 \end{cases}$，得 $a + b = 2029$

或

$\begin{cases} a - 1 = 2 \\ b - 1 = 1013 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a - 1 = 1013 \\ b - 1 = 2 \end{cases}$，得 $a + b = 1017$

因此，$a + b$ 的最小值是1017。

13. [12]

設 $S(ABC)$表示三角形 ΔABC的面積，並且設 $S(BOC) = x$，$S(COA) = y$，$S(AOB) = z$。

注意到：$\frac{AO}{OP} = \frac{(S(AOB))}{S(POB)} = \frac{S(COA)}{S(COP)} = \frac{S(AOB)+S(COA)}{S(POB)+S(COP)} = \frac{z+y}{x}$.

類似地，$\frac{BO}{OQ} = \frac{x+z}{y}$, 以及 $\frac{CO}{OR} = \frac{y+x}{z}$.

因此，$(\frac{AO}{OP})(\frac{BO}{OQ})(\frac{CO}{OR}) = (\frac{z+y}{x})(\frac{x+z}{y})(\frac{y+x}{z})$

$$= \frac{x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz}{xyz}$$

$$= \frac{xy(y+x) + yz(z+y) + zx(x+z) + 2xyz}{xyz}$$

$$= \frac{y+x}{z} + \frac{z+y}{x} + \frac{x+z}{y} + 2.$$

$$= \frac{CO}{OR} + \frac{AO}{OP} + \frac{BO}{OQ} + 2$$

$$= 10 + 2$$

$$= 12$$

14. [77]

運氣最差的情況是抽到 4 種顏色的波子各 19 粒，即抽出了 19x4 = 76 粒波子，這時再抽出任意一粒波子就能保證有 20 粒波子的顏色是相同的。所以至少要抽出 77 粒波子才能確保必定抽到 20 粒相同的波子。

15. [6]

注意該長方形是由 8 個 1cm x 1cm 的正方形組成。

第一次移動：(4,8,12) 等腰三角形 → (5,9,1) 直角三角形

第二次移動： → (6,10,2) 等腰三角形

第三次移動： → (7,11,3) 直角三角形

第四次移動： → (8,12,4) 等腰三角形

第五次移動： → (9,1,5) 直角三角形

…… …… ……

第十一移動： → (3,7,11) 直角三角形

第十二移動： → (4,8,12) 等腰三角形

因每次移動，所組成的三角形都是等腰三角形及直角三角形，並且交替出現。

因此，在 12 次移動中，有 6 次組成等腰三角形及 6 次組成直角三角形。

16. [3.2]

易見$\Delta EBF \sim \Delta FCD$，因為 AAA。因此$BF:CD = EF:FD = 1:4$。設$BF = x$，則$CD = 4x$且有
$FC = BC - BF = 4x = x = 3x$。在$\Delta FCD$上使用畢氏定理可得：

$$CD^2 + FC^2 = FD^2$$
$$(4x)^2 + (3x)^2 = 4^2$$
$$25x^2 = 16$$
$$x = \frac{4}{5} \text{ (捨去負平方根)}$$

而$ABCD$的邊長為：$CD = 4x = \frac{16}{5} = 3.2$

17. [112.5°]

觀察到 $BKDL$ 是一個菱形。因此，ΔBKL 是等腰三角形。

$\angle BKL = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ$

$\angle NKL = 180^\circ - 67.5^\circ = 112.5^\circ$

18. [29]

3 的自乘積的最後兩位數遵循以下模式：3，9，27，81，43，29，87，61，83，49，47，41，23，69，07，21，63，89，67，01。將 2026 除以 20，餘數是 6，因此最後兩位數是 29。

乙部 (每題 6 分)

19. [14]

設 $n = \overline{AB} = 10A + B$，其中 $1 \le A, B \le 9$。由於 A 整除 $10A + B$，故 A 整除 B。由於 B 整除 $10A + B$，故 B 整除 $10A$。綜合上述知 B 只能是 $A, 2A, 5A$，而這些情況均符合條件。

- 若 $B = A$，則 $n = 11, 22, \ldots, 99$，共有 9 種可能性。
- 若 $B = 2A$，則 $n = 12, 24, 36, 48$，共有 4 種可能性。
- 若 $B = 5A$，則 $n = 15$，共有 1 種可能性。

答案為 $9 + 4 + 1 = 14$。

20. [D, B, A, F, C, E]

若 B 和 E 的說話都是真的，那麼 B 的分數高於 E，而 E 的分數高於 A 和 F，這與 F 的說話矛盾。由此可知 B、E 和 F 其中一人說謊，即 A、C 和 D 的說話必定是真的。特別地，A、C 和 E 的排名必定是 A, C, E。

- 若 B 說真話，則其中 5 人的排名為 D, B, A, C, E。注意 E 不可能說真話，故由 F 的說話可知 F 的排名在 B 和 C 之間，再由 A 的說話可知排名為 D, B, A, F, C, E，而這是可行的。
- 若 B 說謊話，則由 E 的說話可知 E 的分數比 B 和 F 的分數高，但此時 F 的說話不可能是真的，矛盾。

21. [Proof]

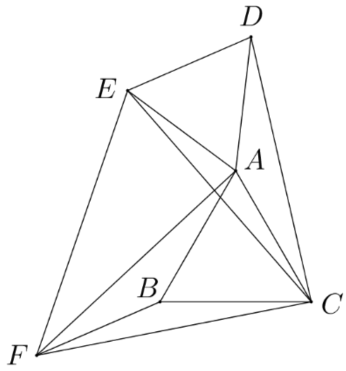
首先，由 $AB = CA$ 、 $AF = CD$ 及 $BF = AD$ 知 $\Delta ABF \cong \Delta CAD$ ，從而得出 $\angle ABF = \angle CAD$ 。由於 $\angle ABC = \angle DAE = 60°$ ，所以

$$\angle CBF = 360° - 60° - \angle ABF = 360° - 60° - \angle CAD = \angle CAE \text{ 。}$$

再結合 $BC = AC$ 及 $BF = AD = AE$ 得 $\Delta CBF \cong \Delta CAE$ ，從而有 $CF = CE$ 。另外，由 $\angle BCF = \angle ACE$ 得

$$\angle ECF = \angle ECB + \angle BCF = \angle ECB + \angle ACE = \angle ACB = 60° \text{ ，}$$

故 $\angle CEF = \angle CFE = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$ ，即 ΔCEF 是等邊三角形。



~ 全卷完 End of Paper ~

擬題委員會委員：

吳端偉教授 (香港大學數學系)

方子豪教授 (香港科技大學數學系)

程德永博士 (香港大學數學系)

徐銘恩博士

洪進美校長

馮德華老師

譚志良老師

徐崑玉老師

潘維凱老師

梁文鍵老師

何偉龍老師