第二十七屆香港青少年數學精英選拔賽

The 27th Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2024 – 2025 (8 / 2 / 2025)

題解 Solution

甲部 (每題 2 分)

1. [625]

2. [9]

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-k}\geq 3$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\geq\sqrt{x-k}+3$$
$$\Rightarrow \quad x\geq x-k+6\sqrt{x-k}+9$$
$$\Rightarrow \quad k-9\geq 6\sqrt{x-k}$$

我們需要 $k\geq 9$，這樣 R.H.S 上就有一個非負數。

k 的最小可能值為 9。

3. [9]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$$

$$(a-6)(b-6)=36$$

$$(a-6,b-6)=(1,36),(2,18),(3,12),(4,9),(6,6),(9,4),(12,3),(18,2),(36,1)$$

有 9 個解。

4. [2025]

$$\frac{2028\times2027\times2026\times2025\times2024\times2023\times2022}{(2025^2+2025-6)(2025^2+2025-2)(2025^2-4050-3)}$$

$$=\frac{2028\times2027\times2026\times2025\times2024\times2023\times2022}{(2025+3)(2025-2)(2025-1)(2025+2)(2025-3)(2025+1)}=2025$$

5. [8]

因為一個三角形中，任何兩條邊的長度之和一定長過第三條邊的長度。

	最短的邊	已知的邊	餘下的邊
1	1	4	4
2	2	4	3
3	2	4	4
4	2	4	5
5	3	4	3
6	3	4	4
7	3	4	5
8	3	4	6

因此，這樣的三角形共有 8 個。

6. [505]

因在 2025！中，每一個因數 2 乘一個因數 5 就可得一個尾零。
2 的倍數比 5 的倍數多，所以只須考慮 5 的倍數：

2025！有 $\left\lfloor\frac{2025}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2025}{25}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2025}{125}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2025}{625}\right\rfloor$ 個 5 的倍數，

因此， 2025！的結尾有 $405+81+16+3=505$ 個零。

另解：

因在 2025！中，每一個因數 2 乘一個因數 5 就可得一個尾零。
2 的倍數比 5 的倍數多，所以只須考慮 5 的倍數：
2025/625 = 3 …… 150，2025 !有 3 個 625 的因數；
2025/125 = 16 …… 25，2025 !有 16 個 125 的因數且不是 625 的因數；
2025/25 = 81，2025 !有 81 個 25 的因數且不是 125 及 625 的因數；
2025/5 = 405 ，2025 !有 405 個 5 的因數且不是 25、125 及 625 的因數；
因此， 2025！的結尾有 $405+81+16+3=505$ 個零。
(這個解的好處是避開高斯符號。)

7. [最大值 ＝ 26 及最小 ＝ 16]

每添加一個小正方形，若有

(1) 一條公共邊：周界會增加 2 單位。

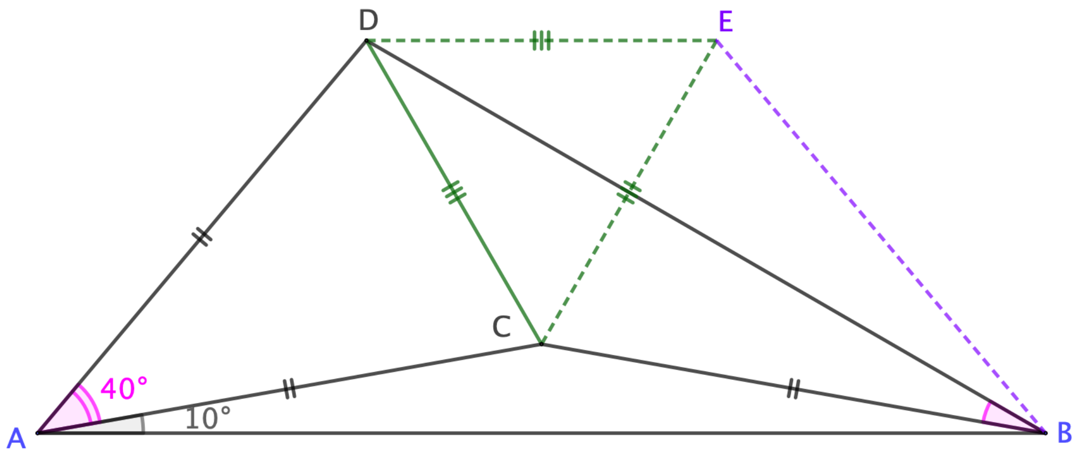
(2) 兩條公共邊：周界會保持不變。

(3) 三條公共邊：周界會減少 2 單位。

因為情況(3)最多只能出現 2 次，所以周界最多只可減少 4 單位。
因此，新圖形周界的最大可能值是 $20 + 2 \times 3 = 26$ 單位。
新圖形周界的最小可能值是 $20 - 4 = 16$ 單位。

8. [20°]

加入 E 點讓 CDE 成為一個等邊三角形。



$\angle CBA = \angle CAB = 10°,\ \angle ACB = 180° - 2(10°) = 160°$

$\angle ACD = \frac{180°-40°}{2} = 70°$

$\angle BCE = 360° - 160° - 70° - 60° = 70°$

$\Delta BCE \cong \Delta ACD$ (SAS)

$BE = AD = AC = BC$

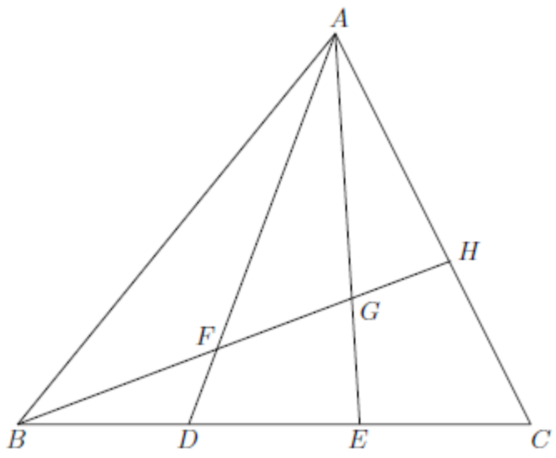
$\Delta BCD \cong \Delta BED$ (SSS)

因此 $\angle CBD = \frac{40°}{2} = 20°$

9. [56]

當第25個整數最大時，最後20個整數的和一定是最小的。 前 5 個整數總和的最大可能值 ＝ $25 \times 20 - (1 + 2 + 3 + \ldots + 20) = 290$。$290 = 56 + 57 + 58 + 59 + 60$。第 5 個整數的最大可能值 ＝ 56。

10. [$\frac{7}{3}$]



我們用 $s(\Delta XYZ)$ 表示三角形 XYZ 的面積。

- 設 $s(\Delta BFD) = x$。由於 $BD = DE$，$s(\Delta DFE) = x$，因此 $s(\Delta BFE) = 2x$。
- 由於 $BF: FG = 4: 3$，所以 $s(\Delta BFE): s(\Delta EFG) = 4: 3$。由於 $s(\Delta BFE) = 2x$，我們有 $s(\Delta EFG) = 1.5x$，因此 $s(\Delta BEG) = 3.5x$。
- 由於 $BF: FG = 4: 3$，我們可以設 $s(\Delta ABF) = 4y$ 且 $s(\Delta AFG) = 3y$。
- 由於 $BD = DE$，$s(\Delta ABD) = s(\Delta ADE)$。因此，我們有 $4y + x = 3y + 2.5x$，因此 $y = 1.5x$。因此，$s(\Delta ADE) = s(\Delta AFG) + s(\Delta EFG) + s(\Delta DFE) = 3y + 1.5x + x = 7x$
- 由於 $BE: EC = 2: 1$，所以 $s(\Delta CEG) = s(\Delta BEG)/2 = 1.75x$。
- 由於 $CE = ED$，$s(\Delta AEC) = s(\Delta ADE) = 7x$，因此 $s(\Delta ACG) = s(\Delta AEC) - s(\Delta CEG) = 5.25x$。
- 觀察 $AH: HC = s(\Delta ABG): s(\Delta CBG) = 7y: 5.25x = (7 \times 1.5x): 5.25x = 2: 1$。因此，

  $s(\Delta CGH) = s(\Delta ACG) \times \frac{1}{3} = 1.75x$。
- 最後，$BG: GH = s(\Delta BCG): s(\Delta CGH) = (x + x + 1.5x + 1.75x): 1.75x = 3: 1$。但 $BG = 7$，因此 $GH = 7/3$。

11. [357]

由於總和是奇數，因此其中一個正方形的面積一定是偶數。唯一的偶質數是 2，一個正方形的邊長是 2。另一個正方形的面積是 $365 - 4 = 361$。面積差 $= 361 - 4 = 357$。

12. [295]

所需條件為 $2(100a+10b+c)=ax^2+bx+c$

即 $(200-x^2)a+(20-x)b+c=0$，其中 $1\leq a\leq 9$，

及 b、c 均為 0 至 9 之間的整數，包括 0 和 9。

請注意，如果 $1\leq x\leq 14$，則

$(200-x^2)a+(20-x)b+c\geq 4a+6b+c\geq 4$ 。

另一方面，如果 $x\geq 16$，則

$(200-x^2)a+(20-x)b+c\leq -56a+4b+c\leq -56+36+9\leq -11$。

因此 x 的唯一可能值為 15。

代入 $x=15$，我們有 $-25a+5b+c=0$，

$c=5(5a-b)$。

情況 1: $c=0$，我們得到 $5a-b=0$，得出 $a=1$ 、$b=5$。

數量是 150。

情況 2: $c=5$，我們有 $5a-b=1$。

如果 $a\geq 3$，則 $b=5a-1\geq 15-1=14$，則不可能。

所以‘a’只能是 1 或 2 。

如果 $a=1$，則 $b=4$，則數字為145。

如果 $a=2$，則 $b=9$，則數字為295。

可能的數字為 145、150 和 295。

滿足所需條件的最大可能數是 295。

13. [8168884]

$a^2+b^2+2c^2-2ac-2bc=(a-c)^2+(b-c)^2$。由於$a;b;c$ 是 1 和 2025 之間的不同偶數，$(a-c)^2\leq 2022^2$ 且 $(b-c)^2\leq 2022^2$，且這兩個等式不能同時成立。因此，
最大可能值最多為 $2022^2+2020^2=8168884$，可以透過選擇獲得
$a=2024$, $b=2022$, $c=2$ 。

14. [25]

該正整數的數位數字只能是 1、2、4 及 8。

(1) 一位數：

只能是 8。(共 1 個整數)

(2) 二位數：

可以是 18、81、24 及 42。(共 4 個整數)

(3) 三 位數：

可以是 118、181、811、124、214、241、142、412、421 及 222。(共 10 個整數)

(4) 四位數：

可以是1118、1181、1811、1124、1214、1241、1142、1412、1421 及 1222。(共 10 個整數)

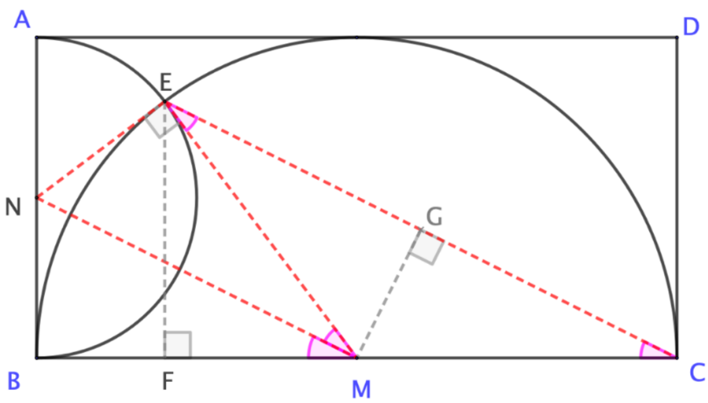
因此，共有 $1+4+10+10=25$個整數的數位積是 8。

15. [120960]

首先我們統計$\overline{DEF}$可能會取值的個數，即$\binom{9}{3}\times 2=168$。（其他方法例如，當$E=1$時，D和F的選擇數為 $8\times 7=56$；當$E=2$時，D和F的選擇數為 $7\times 6=42$等，所以$\overline{DEF}$的可能取值個數為$8\times 7+7\times 6+6\times 5+\cdots+2\times 1=168$。

固定了D、E、F後，剩下的六位數字（A、B、C、G、H、J），任意排列都可以，所以我們有$6!=720$種選擇。整體而言，n的可能取值數量為$168\times 720=120960$。

16. [32%]



$MN=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\Delta BNM\cong\Delta ENM$;

$\Delta MGE\cong\Delta MGC$;　　$\Delta BNM\sim\Delta FEC\sim\Delta GME$

$$EG=2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$EC=2EG=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$EF=EC\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{8}{5}$$

$$FC=EC\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{16}{5}$$

陰影百分比

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{16}{5}\right)}{2\cdot 4}(100\%)=32\%$$

17. [165]

- 觀察 $\overline{AC}$ 和 $\overline{ABC}$ 要麼都是 2 的倍數，要麼都不是 2 的倍數。
- 觀察 $\overline{AC}$和 $\overline{ABC}$ 要麼都是 5 的倍數，要麼都不是 5 的倍數。
- 由於 (iii)，$\overline{AB}$ 必須是 8 的倍數，因此 B 是偶數。由於 (ii)，B 不能為 0。
- 觀察到 $A+B$ 和 $A+B+C=A+B+5$ 不能同時是 3 的倍數，因此 $\overline{AB}$ 和 $\overline{ABC}$ 不能同時是 3 的倍數。 $\overline{AC}=\overline{A5}$ 必須是3 的倍數，因此 A 是 1,4 或 7。
- 還剩兩種情況：
  - $\overline{AC}$ 和 $\overline{ABC}$ 都是 3 的倍數。因此，$A+C$ 和 $A+B+C$ 是 3 的倍數，以及 B 是 3 的倍數。因為 B 是偶數但 $B\neq 0$，$B=6$。由於(iii)，$\overline{ABC}$ 的剩餘選擇是165。
  - $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 都是 3 的倍數，但 $\overline{ABC}$ 不是 3 的倍數。因此，$A+B$ 和 $A+C$ 都是 3 的倍數，由此 $B-C=5$ 是 3 的倍數。因為 B 是偶數，所以 B 不是 2，就是 8。由於 (iii) ，$\overline{ABC}$ 的剩餘選擇是 725 或 485。
- 在剩下的三個選擇中，165 是唯一滿足 (iv) 的選項。

18. [$a=5$, b $=1$, c $=15$]

給定的方程式為 $(2^a)(7^b)=c^2-1$，顯然「c」是奇數。
進一步，$(2^a)(7^b)=(c-1)(c+1)$，因此 $c-1$ 和 $c+1$ 都是偶數。
由於$(c+1)-(c-1)=2$，所以只有其中之一是4的倍數，不能同時是7的倍數。

<u>情況 1</u>：$c-1=2$ ------------------------------------- (1)
$c+1=2^{a-1}(7^b)$ ------------------------- (2)
不可能有解，因為 $c-1$ 和 $c+1$ 只相差 2。

<u>情況 2</u>：$c-1=2^{a-1}$ -----------------------------------(3)
$c+1=2(7^b)$ --------------------------------(4)
減法時，$2=2(7^b)-2^{a-1}$
經試驗，$a=1$ 和 $a=2$ 均未給出有效解。
<u>對於 $a\geq 3$</u>，我們有 $1=7^b-2^{a-2}$
即 $2^{a-2}=7^b-1$
請注意，$7^b-1\equiv 6 \pmod 7$，但 $2^{a-2}\equiv 1$、2 或 4 $\pmod 7$。
因此，在這種情況下沒有解決方案。

<u>情況 3</u>：$c-1=2(7^b)$ -------------------------------- (5)
$c+1=2^{a-1}$---------------------------------- (6)
減法時，$2=2^{a-1}-2(7^b)$
由於 $2(7^b)\geq 14$，因此 $a\leq 4$ 無解。
<u>對於 $a=5$</u>，透過計算，$b=1$，$c=15$。

對於 $a \geq 6$，$1 = 2^{a-2} - 7^b$ ，其中 $2^{a-2} \equiv 0 \pmod{16}$
由於 $7^1 \equiv 7 \pmod{16}$，且對於 $b \geq 2$，則 $7^b \equiv 1$ 或 $7 \pmod{16}$
因此，$a \geq 6$ 沒有解。
唯一的解是 $(5, 1, 15)$ 。

乙部 (每題 6 分)

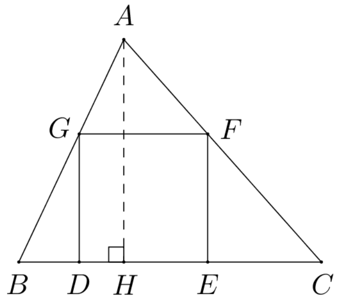
19. (a)[$10, 20, 50, 81$]

設 a 是一個兩位的強大的正整數。由於 $10^2 = 100$ 為三位數，a 的數字之和 s 不能超過 9。

- 若 $s = 1$，a 只能是 10，滿足條件。
- 若 $s = 2$，a 只能是 $11, 20$，當中只有 20 能被 $2^2 = 4$ 整除。
- 若 $s = 3$，a 必定不能被 $3^2 = 9$ 整除（否則數字之和應為 9 的倍數）。
- 若 $s = 4$，a 只能是 $13, 22, 31, 40$，全部不能被 $4^2 = 16$ 整除。
- 若 $s = 5$，則 a 能被 $5^2 = 25$ 整除，它只能是 $25, 50, 75$，當中只有 50 滿足條件。
- 若 $s = 6$，則 a 能被 $6^2 = 36$ 整除，它只能是 $36, 72$，均不滿足條件。
- 若 $s = 7$，則 a 能被 $7^2 = 49$ 整除，它只能是 $49, 98$，均不滿足條件。
- 若 $s = 8$，則 a 能被 $8^2 = 64$ 整除，它只能是 64，不滿足條件。
- 若 $s = 9$，則 a 能被 $9^2 = 81$ 整除，它只能是 81，滿足條件。

(b) 我們證明所有形如 $10^k n$ 的正整數都是強大的。事實上，$10^k n$ 是 n 之後加上 k 個零所得的正整數，它的數字之和與 n 的數字之和相同。若這數字之和能整除 n，顯然它亦能整除 $10^k n$。

20. (a) 設 H 是 A 到 BC 的垂足。考慮線段 BH 上的一點 D。我們可以依次在 AB、AC 和 BC 上構作 G、F 和 E，使得 $DG \perp BC$、$FG \perp DG$ 和 $EF \perp FG$，這樣可令 $DEFG$ 是一個長方形。當 D 從 B 到 H 移動時，DG 的長度從 0 增加至 AH 的長度，而 FG 的長度從 BC 的長度減少至 0，因此過程中必定出現 $DG = FG$ 的情況，這時 $DEFG$ 恰好是一個正方形。



(b) 10

已知 $BC = AH$ 及 $\frac{BC \times AH}{2} = 50$。因此有 $\frac{BC^2}{2} = 50$，即 $BC = 10$。

(c) 5

由於 $\angle AGF = \angle ABC$、$\angle AFG = \angle ACB$ 及 $\angle GAF = \angle BAC$，我們有 $\Delta AGF \sim \Delta ABC$。設 x 為 $DEFG$ 的邊長，那麼 ΔAGF 和 ΔABC 的高的比例為 $\frac{GF}{BC} = \frac{x}{10}$。由於 $AH = BC = 10$，可知 ΔAGF 的高為 x。與此同時，ΔAGF 的高加上 GD 的長度等於 AH 的長度，故 $x + x = 10$，解得 $x = 5$。

21. 假設 a 位於最後表格的第 i 行第 j 列，而 b 位於第 i 行第 $j+1$ 列，我們只需證明 $a < b$ 即可。

注意第 $j+1$ 列共有 i 個數不超過 b（即位於第 $1, 2, \ldots, i$ 行的數）。在操作前，這 i 個數左方的數都分別比它們小，即第 j 列最小有 i 個數小於 b。在操作後，由於 a 是第 j 列中第 i 小的數，因此它必定小於 b，命題得證。

~ 全卷完 End of Paper ~

擬題委員會委員：

吳端偉教授 (香港大學數學系)

方子豪教授 (香港科技大學數學系)

程德永博士 (香港大學數學系)

張潤權博士 (澳洲國立大學)

徐銘恩博士

洪進美校長

馮德華老師

譚志良老師

徐崑玉老師

潘維凱老師

何偉龍老師