

第二十七屆香港青少年數學精英選拔賽

**The 27th Hong Kong Mathematical
High Achievers Selection Contest**

2024 – 2025 (8 / 2 / 2025)

試題 Question Paper

甲部 (每題 2 分)

Part A (2 marks for each question)

把答案填在答題紙所提供的位置。

Write your answers in the spaces provided on the answer sheets.

1. 求 2025^{2025} 最後的三位數。

Find the last 3 digits of 2025^{2025} .

2. 求 k 的最小可能值使不等式 $\sqrt{x} - \sqrt{x-k} \geq 3$ 有實數解。

Find the smallest possible value of k , in order that the inequality $\sqrt{x} - \sqrt{x-k} \geq 3$ would have a real solution.

3. 若 (a, b) 是 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ 的解，其中 a, b 是正整數。問共有多少個解？

If (a, b) are the solution of $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ and a, b are positive integers, how many solutions are there?

4. 計算 $\frac{2028 \times 2027 \times 2026 \times 2025 \times 2024 \times 2023 \times 2022}{(2025^2 + 2025 - 6)(2025^2 + 2025 - 2)(2025^2 - 4050 - 3)}$ 。

Evaluate $\frac{2028 \times 2027 \times 2026 \times 2025 \times 2024 \times 2023 \times 2022}{(2025^2 + 2025 - 6)(2025^2 + 2025 - 2)(2025^2 - 4050 - 3)}$.

5. 已知某三角形不是等邊三角形，它的三條邊長均為整數，其中有一條邊長為 4，但這三角形最短的一條邊的長度不是 4，問這樣的三角形共有多少個？

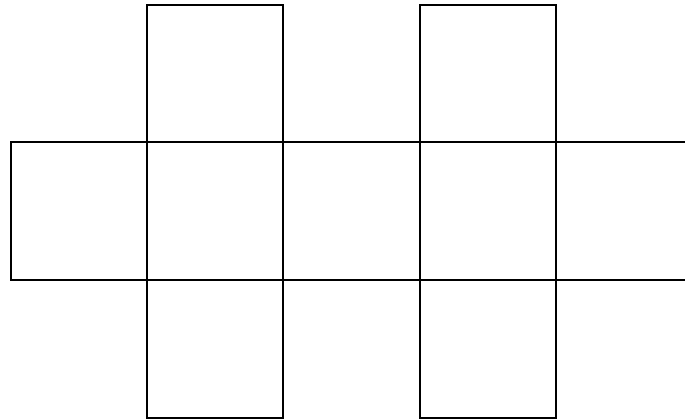
It is given that a triangle is not an equilateral triangle and that all the sides of that triangle are all integers. One of the side lengths is 4, but the shortest side length of the triangle is not 4. How many such triangles are there?

6. 已知 $2025! = 2025 \times 2024 \times 2023 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ 。問 $2025!$ 的結尾有多少個零？

It is given that $2025! = 2025 \times 2024 \times 2023 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.
How many zeros are there at the end of $2025!$?

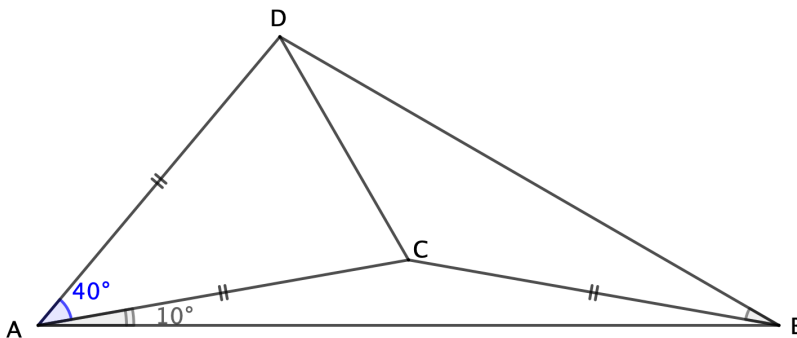
7. 下圖由九個邊長為 1 單位的小正方形拼合而成，該圖形的周界為 20 單位。若多加三個這樣的小正方形，且每個新加的小正方形均須與原圖中某個小正方形有至少一條的共同邊。求新圖形周界的最大及最小可能值。

In the figure below, there are nine small squares with side lengths of 1. The perimeter of the figure is 20. If three more these small squares are added, and each newly added small square must have at least one common side with a small square in the original figure. Find the maximum and minimum possible values of the perimeter of the new figure.



8. 圖中 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 是等腰三角形。求 $\angle CBD$ 。

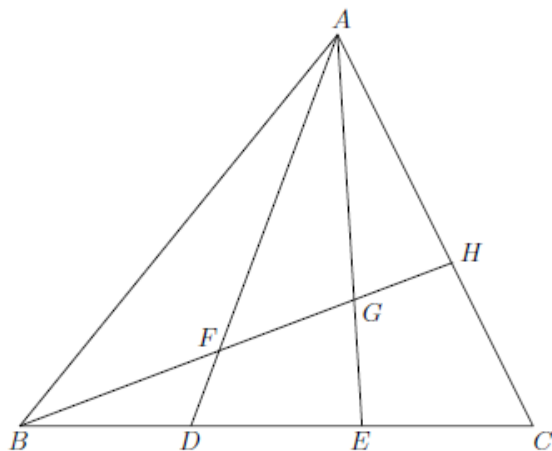
In the figure, $\triangle ABC$ and $\triangle ACD$ are isosceles triangles. Find $\angle CBD$.



9. 以遞降序排列的 25 個不同的正整數，它們的平均值為 20。找出第 5 個整數的最大可能值。
A set of 25 different positive integers is arranged in descending order and their mean is 20. Find the greatest possible value of the 5th integer.

10. 在下圖中， D, E 是 BC 上的點，使得 $BD = DE = EC$ 。 H 是 AC 上的一點。 BH 與 AD 相交於 F 點。 BH 與 AE 相交於 G 。若 $BF = 4$ 和 $FG = 3$ ，求 GH 的長度。

In the figure below, D and E are points on BC , such that $BD = DE = EC$. H is a point on AC . BH intersects AD at F . BH intersects AE at G . If $BF = 4$ and $FG = 3$, find the length of GH .



11. 兩個正方形的面積總和為 365，其中兩個正方形的邊長皆為質數。求兩個正方形的面積差。
The sum of areas of two squares is 365, where the side lengths of the squares are prime numbers. Find the difference in the areas of the two squares.

12. $N = \overline{abc}$ 是以 10 為底數表示的數字。即 $N = 100a + 10b + c$ 。
如果我們將 \overline{abc} 視為以 x 為底數表示的數字，其中 x 是與 10 不同的數字，則其數值等於 $2N$ 。
求滿足上述條件，並以 10 為底數， N 的最大可能值。
 $N = \overline{abc}$ is a number expressed in base 10. That is, $N = 100a + 10b + c$.
If we consider \overline{abc} as a number expressed in base x , where x is a number different from 10, then its numerical value is equal to $2N$. Find the largest possible value of N , in base 10, satisfying the above conditions.

13. a, b, c 是互不相同的偶數，且均大於 1 及小於 2025。求 $a^2 + b^2 + 2c^2 - 2ac - 2bc$ 的最大可能值。
 a, b, c are distinct even integers, all of them greater than 1 and less than 2025. Find the maximum possible value of $a^2 + b^2 + 2c^2 - 2ac - 2bc$.

14. 一個正整數的所有數位數字的乘積稱為該整數的「數位積」。
例如：4 的數位積是 4；56 的數位積是 $5 \times 6 = 30$ ；789 的數位積是 $7 \times 8 \times 9 = 504$ 。
在 1 至 2025 的整數中，共有多少個整數的數位積是 8 呢？
The product of all the digits of a positive integer is called the "digit product" of that integer.
For example: the digit product of 4 is 4; the digit product of 56 is $5 \times 6 = 30$; the digit product of 789 is $7 \times 8 \times 9 = 504$.
Among the integers from 1 to 2025, how many integers have a digit product of 8?

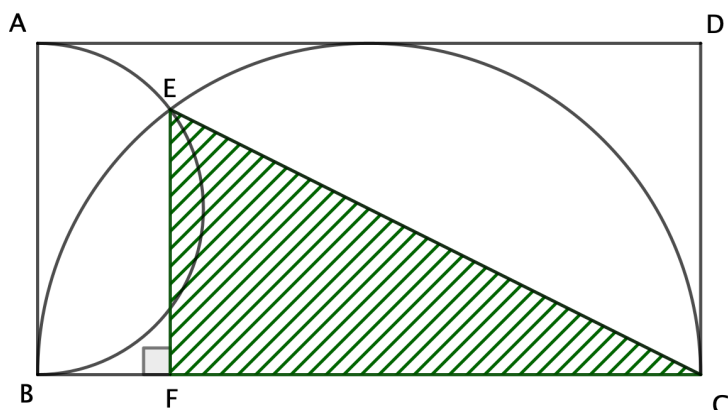
15. $n = \overline{ABCDEFGHIJ}$ 是一個九位整數，且數字 1 至 9 各出現 1 次。若 $E < D$ 和 $E < F$ ，問 n 有多少個不同的可能值？

$n = \overline{ABCDEFGHIJ}$ is a nine-digit integer, where each of the digits 1 to 9 appears exactly once.

If $E < D$ and $E < F$, how many possible values of n ?

16. 圖中， $ABCD$ 是長方形， AEB 和 BEC 是半圓， E 是兩個半圓的交點， F 是 BC 上的一點。如果 $EF \perp BC$ ，問陰影部份佔長方形 $ABCD$ 的多少百分比？

In the figure, $ABCD$ is a rectangle while AEB and BEC are semi-circles, E is the intersection of the two semi-circles and F is a point on BC . If $EF \perp BC$, what percentage of rectangle $ABCD$ is shaded?



17. \overline{ABC} 是一個三位正整數。對於三個正整數 \overline{AB} ， \overline{AC} 及 \overline{ABC} ，下述四句成立：

- (i) 當中有兩個是 3 的倍數；
- (ii) 當中有兩個是 5 的倍數；
- (iii) 當中有一個是 8 的倍數；
- (iv) 當中有一個是 11 的倍數。

求 \overline{ABC} 的值。

\overline{ABC} is a three-digit positive integer. Among the three positive integers \overline{AB} , \overline{AC} and \overline{ABC} , the followings hold:

- (i) exactly two of them are multiples of 3;
- (ii) exactly two of them are multiples of 5;
- (iii) exactly one of them is multiples of 8;
- (iv) exactly one of them is multiples of 11;

Find the value of \overline{ABC} .

18. 求滿足下列方程的所有正整數 a 、 b 和 c 。

$$1 + (2^a)(7^b) = c^2$$

Find all positive integers a , b and c satisfying the following equation.

$$1 + (2^a)(7^b) = c^2$$

乙部 (每題 6 分)

Part B (6 marks for each question)

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

Write your full solution and answers in the spaces provided on the answer sheets.

19. 若一個正整數能被它所有數字之和的平方整除，則我們稱它為「強大的」。例如，2025 是強大的，這是因為它能被 $(2+0+2+5)^2 = 81$ 整除。
- (a) 求所有兩位的強大的正整數。
- (b) 若 n 是一個強大的正整數，求證：它有無窮多個強大的倍數。

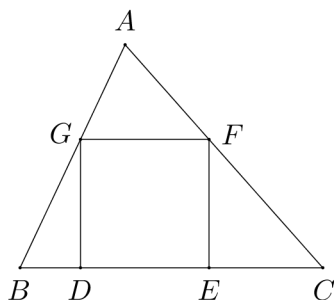
A positive integer is said to be 'powerful' if it is divisible by the square of its sum of digits. For example, 2025 is powerful because it is divisible by $(2+0+2+5)^2 = 81$.

- (a) Find all two-digit powerful positive integer(s).
- (b) If n is a powerful positive integer, show that it has infinitely many powerful multiples.

20. 設 $\triangle ABC$ 是一個面積為 50 的銳角三角形。假設底 BC 和它對應的高的長度相同。我們希望構作一個正方形 $DEFG$ ，使得 D 和 E 在線段 BC 上， F 在線段 AC 上，而 G 在線段 AB 上。
- (a) 解釋為何我們必定能構作這樣的一個正方形 $DEFG$ 。
- (b) 求 BC 的長度。
- (c) 求 $DEFG$ 的邊長。

Let $\triangle ABC$ be an acute triangle of area 50. Suppose the base BC and its corresponding height have the same length. We want to construct a square $DEFG$ such that D and E lie on the segment BC , F lies on the segment AC , while G lies on the segment AB .

- (a) Explain why we can always construct such a square $DEFG$.
- (b) Find the length of BC .
- (c) Find the side length of $DEFG$.



21. 我們將數 $1, 2, \dots, 2025$ 填入一個 45×45 的表格的方格內，使得每個方格填有一個不同的數，且每一行的數按小至大從左至右排列。然後，我們將每一列的數重新排序，使得它們按小至大從上至下排列。求證：在最後所得的表格中，每一行的數依然按小至大從左至右排列。

We fill in all cells of a 45×45 table with the numbers $1, 2, \dots, 2025$ such that each cell contains a different number and the numbers in each row are in ascending order from left to right. Next, we rearrange the numbers in each column such that they are in ascending order from top to bottom. Show that the numbers in each row of the resultant table are still in ascending order from left to right.

~ 全卷完 End of Paper ~

擬題委員會委員：

吳端偉教授 (香港大學數學系)

方子豪教授 (香港科技大學數學系)

程德永博士 (香港大學數學系)

張潤權博士 (澳洲國立大學)

徐銘恩博士

洪進美校長

馮德華老師

譚志良老師

徐崑玉老師

潘維凱老師

何偉龍老師