第廿六屆香港青少年數學精英選拔賽

The 26th Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest
2023 – 2024 (27 / 1 / 2024)

題解 Solution

甲部 (每題 2 分)

1. [30345]

因為 x, y, z 的最大公因數是 2023，$\frac{x}{2023}$ ，$\frac{y}{2023}$ ，$\frac{z}{2023}$ 均是正整數。另外，x, y, z 的最小公倍數是91035，$\frac{x}{2023}, \frac{y}{2023}, \frac{z}{2023}$ 的最小公倍數是 $\frac{91305}{2023} = 45$。當 $\frac{x}{2023} = 1$ ，$\frac{y}{2023} = 5$ ，$\frac{z}{2023} = 9$ 時會令到 $\frac{x}{2023} + \frac{y}{2023} + \frac{z}{2023}$ 得到最小值， 而 $x + y + z$ 的最小值為 $(1 + 5 + 9) \times 2023 = 30345$。

2. [7]

3 的指數的個位數為 3、9、7、1、3 …
3^{33}除以 4 餘 3 ， 所以答案是 7。

3. [4]

$2024 = 2^3 \times 11 \times 23 = (a + b)(a - b)$
由於 $(a + b)$ 和 $(a - b)$ 的奇偶性相同， 所以它們都是雙數，
可以列出所有可能性：$(a + b, a - b) = (1012,2), (506,4), (92,22), (46,44)$
因此，有 4 種方法。

4. [星期六]

總日數是$7 \times 366 + 20 \times 365 - 8 - 31 - 30 - 31 - 31 = 9730$，
$9730 = 7 \times 1390 + 1$，因此，答案是星期六。

5. [8]

$a^2+b^2+2c^2-2ac-2bc=(a-c)^2+(b-c)^2$。因為 a，b，c 是不同數值的雙數，$(a-c)^2\ \geq\ 4$及 $(b-c)^2\ \geq\ 4$ ，所以最小可能值為 8 。可透過代入 $a=6$， $b=2$， $c=4$ 來計算。

6. [5640]

當與2024相加時， 無一次進位的四位數：
千位數可以是 1 至 7: 共有 7 個
百位數可以是 0 至 9: 共有 10 個
十位數可以是 0 至 7: 共有 8 個
個位數可以是 0 至 5：共有 6 個
所以無一次進位的四位數有 $7\times10\times8\times6$ ＝3360個。
因此， 最少有一次進位的數有$(9999-1000+1)-3360$ ＝5640個。

7. [33]

對於任何的 $n\geq7$， a_n 是 $7\times5\times4=140$ 的倍數 ， 所以 $(a_7+a_8+\cdots+a_{2023})$ 可以整除 140。 因此，所需求出的餘數相等於 $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$ 除以 140 所得出的餘數。 因為 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1+2+6+24+120+720=873$，所以答案是 33。

或
$a_5+a_6=5!+6\times5!=7\times5!$ ，可以整除 140，所以得出的餘數是
$a_1+a_2+a_3+a_4=33$。

8. [146]

$ab-(a+b)=142$
$ab-a-b+1=143$
$(a-1)(b-1)=143$
$\begin{cases}a-1=1\\b-1=143\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1=143\\b-1=1\end{cases}$ ，得 $a+b=146$

或

$\begin{cases}a-1=11\\b-1=13\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1=13\\b-1=11\end{cases}$ ，得 $a+b=26$
因此， $a+b$ 的最大值是 146。

9. [13]

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = 17 + 2\sqrt{30}$

$\therefore\ a + b = 17$ 及 $ab = 30$ ，得 $a = 15$，$b = 2$

因此， $a - b = 13$。

10. [-20240127]

考慮 $\frac{x^2}{(x+1)(x-1)-x^2} = -x$

因此, 答案是 -20240127。

11. [$\frac{4}{3}$]

假設十個小孩分別獲得 $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ 數量的糖果：

已知 $20\,x_1 = x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{10}$

$20\,x_2 = x_1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{10}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$

$20\,x_9 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10}$

數式相加， $20(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_9) = 8(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_9) + 9x_{10}$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_9}{x_{10}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

最終， $k = \frac{x_{10}}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_9} = \frac{4}{3}$ 。

或

因為前九位孩子都遇到相同的處境，所以可以假定前九位孩子都獲得相同數量的糖果。

假設前九位孩子各自獲得的糖果數為 m，及第十位孩子獲得的糖果數量為 n。

由此，$\frac{m}{8m+n} = \frac{1}{20}$，得出 $12m = n$。

最終得出，$k = \frac{n}{9m} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$。

12. [$\frac{33}{100}$]

設那兩盒彈珠分別放置了 a 及 b 顆數量的彈珠，那兩個盒子當中的紅色彈珠數量分別為 x 及 y 。

當中的 a，b，x，y 均為非負整數，以及 $a \neq 0$，$b \neq 0$。

題目提及 $\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{9}{50}$。

由此可見 $ab = 50k$ 及 $xy = 9k$ ，而 k 是一個正整數。

再者，$a + b = 30$ ，而 $ab \neq 0$。

然後，因為 A.M. ≥ G.M. ，所以 $ab \leq \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 225$。

因此 $50k \leq 225$。

由於 k 是一個正整數，所以k的數值只可以是 1， 2， 3 或 4。

<u>情況 1</u>: $k = 1$，得出 $ab = 50$ 及 $a + b = 30$

這個情況沒有可行解。

<u>情況 2</u>: $k = 2$，得出 $ab = 100$ 及 $a + b = 30$

這個情況沒有可行解。

<u>情況 3</u>: $k = 3$，得出 $ab = 150$ 及 $a + b = 30$

這個情況沒有可行解。

<u>情況 4</u>: $k = 4$，得出 $ab = 200$ 及 $a + b = 30$

這個情況的可行解是 $a = 10$，$b = 20$。

接著，$xy = 9k = 36$ ， 以及因為每個盒子中的紅色彈珠數量均少於綠色彈珠數量，

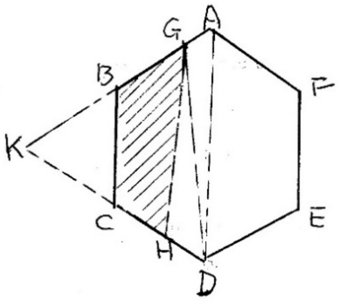
所以 $x \leq \frac{a}{2}$ 及 $y \leq \frac{b}{2}$。

我們只能得出 $x = 4$ 及 $y = 9$。

取出兩粒彈珠都是綠色的機率是：$\left(1 - \frac{4}{10}\right)\left(1 - \frac{9}{20}\right) = \frac{33}{100}$。

13. [$11.5\ cm^2$]

延伸線段 AB 及 DC 至 K 點
相連線段 AD 及 GD
明顯地，四邊形 $ABCD$ 的面積是：



$\frac{1}{2}$ ($ABCDEF$的面積) = $18\ cm^2$

以及 ΔBKC 的面積是：

$\frac{1}{6}$ ($ABCDEF$的面積) = $6\ cm^2$

所以 ΔAKD 的面積 = $24\ cm^2$。
現在 $AG : GB = 1:3$， 所以 $AG : GK = 1:7$， 由此 $GK : AK = 7:8$。

ΔGKD 的面積 $= \frac{7}{8}$(ΔAKD 的面積) $= 24(\frac{7}{8})cm^2 = 21\ cm^2$。

接著，$CH : HD = 2:1$， 所以 $KH : KD = 5:6$。

ΔGKH 的面積 $= \frac{5}{6}$(ΔGKD 的面積) $= 21(\frac{5}{6})\ cm^2 = \frac{35}{2}\ cm^2$。

最終，四邊形 $GBCH$ 的面積 $= \left(\frac{35}{2} - 6\right) cm^2 = \frac{23}{2}\ cm^2 = 11.5\ cm^2$。

14. [$\frac{1}{2}$]

設 $x = AP$ 及 $AB = 1$ 。

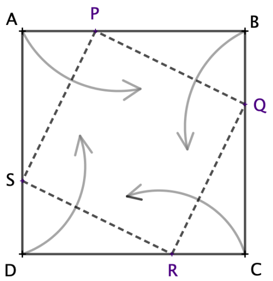
$1 - 4(1-x)x = \frac{1}{5}[1 - 2(1-x)x]$

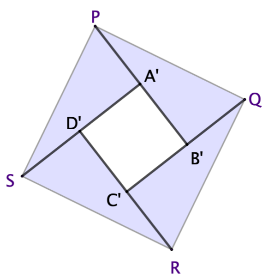
$5 - 20x + 20x^2 = 1 - 2x + 2x^2$

$9x^2 - 9x + 2 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ 或 $x = \frac{2}{3}$

$\frac{AP}{PB} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{2}$

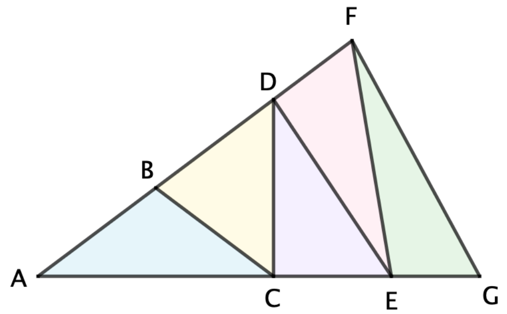




15. [$\frac{8}{3}$]

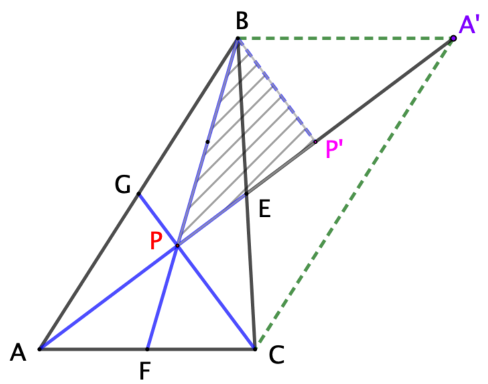
設 $AC = x$ ，$CE = \frac{AC}{2} = \frac{x}{2}$ ，$EG = \frac{AC+CE}{4} = \frac{x+\frac{x}{2}}{4} = \frac{3x}{8}$

$$\frac{AC}{EG} = \frac{x}{\frac{3x}{8}} = \frac{8}{3}$$



16. [72]

旋轉 ABC $180°$ 並置於 C點上。 我們得出



在三角形$BP'P$，$BP' = \left(\frac{2}{3}\right)(9) = 6$，$PP' = 2\left(\frac{1}{3}\right)(12) = 8$ 及 $BP = \left(\frac{2}{3}\right)(15) = 10$。

$\Delta PP'B$ 是一個直角三角形及它的面積是 $\frac{1}{2}(6)(8) = 24$。

ΔABC 的面積是 $= 3(24) = 72$。

17. [12000]

設 $4x$ 和 x 分別是甲和乙每天所生產的物件數量。由題意得 $4x+1200=3(x+1200)$，解得 $x=2400$。故工廠每天共生產 $4x+x=12000$ 件物件。

18. [38]

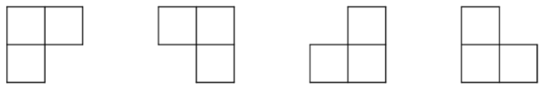
方程可寫成 $17p^5q^2=n^3-n=(n-1)n(n+1)$。由於右方是三個連續整數之積,它必定是 2 和 3 的倍數。因為 p 和 q 是質數， 只能有$(p,q)=(2,3)$ 或 $(3,2)$。
若$(p,q)=(3,2)$， 則 $3^5=243$ 整除 $(n-1)n(n+1)$。因為 $n-1$、n 和 $n+1$ 之中只能有一個是3的倍數 ， 故當中必定有一個是243的倍數, 所以$n\geq 242$ ， 但顯然有 $(n-1)n(n+1)>17\times 3^5\times 2^2$， 矛盾。

若 $(p,q)=(2,3)$， 則 $3^2=9$ 整除 $(n-1)n(n+1)$， 同上，可知 $n-1$、n 和 $n+1$ 之中必定有一個是 9 的倍數。另外， 由 17 整除 $(n-1)n(n+1)$ 知 $n-1$、n 和 $n+1$ 之中必定有一個是 17 的倍數。符合這兩個條件的最小的 n 是 17 。
由於$16\times 17\times 18=17\times 2^5\times 3^2$，顯然 $n=17$ 是唯一解。
所以 $n+3p+5q=17+3\times 2+5\times 3=38$。

乙部 (每題 6 分)

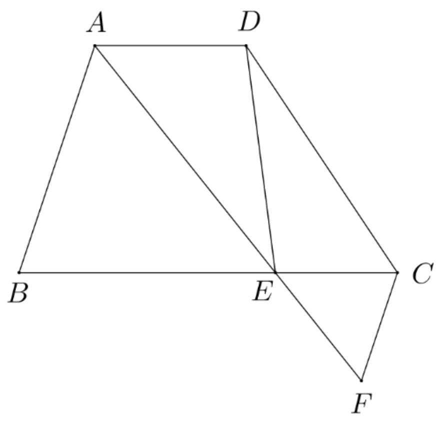
19. [8]

顯然每個 2×2 正方形內最多只能有 2 個紅色單位正方格。由於整個 4×4 棋盤可以分成 4 個 2×2 正方形, 它最多只能有個 $2 \times 4 = 8$ 紅色單位正方格。
另一方面, 我們可將第一行和第四行的所有方格塗上紅色, 那麼共有 8 個紅色單位正方格, 且滿足條件。



20. [6]

首先, 由於 AD 和 BC 平行，故 ΔABE 和 ΔCDE 有相同的高, 而它們的底的比例為 $BE:EC = 2:1$， 因此 ΔABE 的面積等於 ΔCDE 的面積的兩倍，即等於 24 。
由於 CF 和 AB 平行， 容易得知 ΔCEF 和 ΔBEA 的內角相等， 因此有 $\Delta CEF \sim \Delta BEA$ ， 這對相似三角形的比例為 $\frac{CE}{BE} = \frac{1}{2}$，所以 ΔCEF 的面積等於 ΔABE 的面積的 $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ，即等於6。



21. (b)

$$n!\,(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)}+\frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}+\cdots$$

$$<\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\frac{1}{(n+3)(n+2)}+\frac{1}{(n+4)(n+3)}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots$$

$$=\frac{2}{n+1}$$

(c)

假設相反地 α 是一個有理數，然後將其寫成 $\alpha=\frac{m}{n}$，m，$n\in\mathbb{N}$ 。

假設 $n\geq 2$ (若果不只展開分數式)

考慮到 $n!\,\alpha=n!\,\frac{m}{n}=(n-1)!\,m$ 是一個整數。可是，若果我們亦考慮到

$$n!\,\alpha=n!\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\underbrace{n!\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}_{\text{整數}}+n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right)$$

可是，從(b)及 $n\geq 2$可以得出

$$n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right)<\frac{2}{n+1}\leq\frac{2}{2+1}<1$$ 。

~ 全卷完 End of Paper ~

擬題委員會委員：

吳端偉教授 (香港大學數學系)

方子豪教授 (香港科技大學數學系)

程德永博士 (香港大學數學系)

張潤權博士 (澳洲國立大學)

洪進美校長

譚志良老師

徐崑玉老師

潘維凱老師

張展豪老師

何偉龍老師