

第廿五屆香港青少年數學精英選拔賽
The 25th Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest
2022 – 2023 (4 / 2 / 2023)

題解 Solution

甲部 (每題 2 分)

1. 【2.029】

$$2.0195 \leq x < 2.0295$$

$$70.6825 \leq 35x < 71.0325$$

即那 35 個自然數的總和必定為 71，它們的平均數為 2.0285714286...。

因此， $x = 2.029$ 。

2. 【15 小時】

設小明和小強分別需要 a 小時和 b 小時獨自完成該件工作。

即小明和小強分別每小時獨自完成 $\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{b}$ 件工作，即 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10}$ 。

依題意 $4 \times (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) + 18 \times \frac{1}{b} = 1$

$$\therefore \frac{4}{10} + \frac{18}{b} = 1$$

解得 $b = 30$ 及 $a = 15$ 。

小明需要 15 小時獨自完成該件工作。

3. 【1】

設 $x = 2020$ 。

$$\begin{aligned} & 2023 - \sqrt{1 + 2023\sqrt{1 + 2022\sqrt{1 + 2021 \times 2019}}} \\ &= 2023 - \sqrt{1 + (x+3)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + (x+1)(x-1)}}} \\ &= 2023 - \sqrt{1 + (x+3)\sqrt{1 + (x+2)x}} \\ &= 2023 - \sqrt{1 + (x+3)(x+1)} \\ &= 2023 - (x+2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. 【2】

$$n \geq 3$$

當 $n = 3$, $\sqrt{5\sqrt{3-3}-3+1}$ (捨去)

當 $n = 4$, $\sqrt{5\sqrt{4-3}-4+1}$ (捨去)

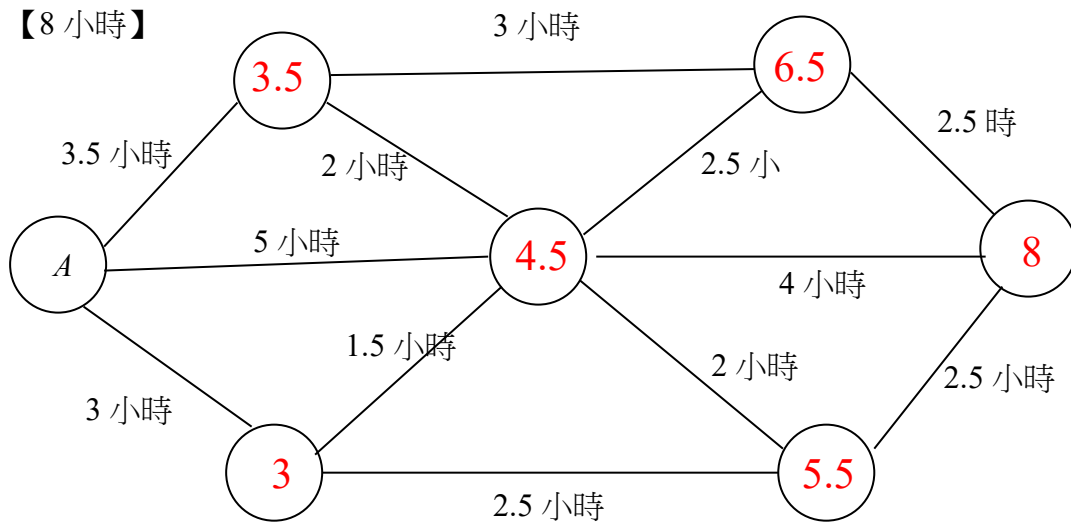
當 $n = 7$, $\sqrt{5\sqrt{7-3}-7+1} = 2$

5. 【 $\frac{1}{3}$ 】

已知等式可變換為

$$\begin{cases} 3(a+2b)+2(3b+c)=63 \\ 2(a+2b)+(3b+c)=35 \end{cases}, \text{ 則 } \begin{cases} a+2b=7 \\ 3b+c=21 \end{cases} \text{。所以 } \frac{a+2b}{3b+c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \text{。}$$

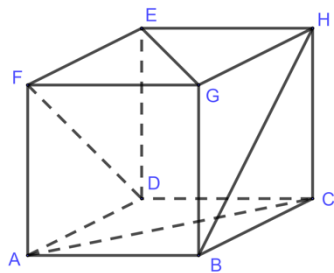
6. 【8 小時】



圈中的數字代表由城市 A 前往該市鎮/城市所需的最短時間。
因此，所需的最短時間是 8 小時。

7. 【4】

如下圖，



由於正立方體只有 8 個頂點，因此最多只有 $8 \div 2 = 4$ 條線段合符題意。
 N 的最大值 = 4

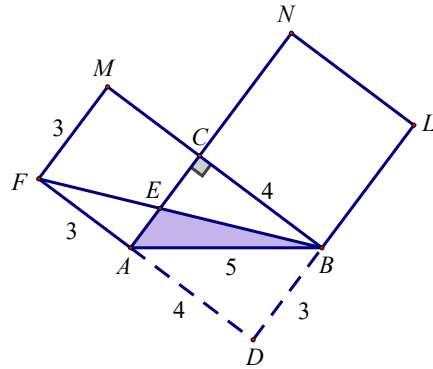
8. **【 $\frac{18}{7}$ 】**

設 FA 與 LB 的延線相交於 D 。

另 AC 與 BF 相交於 E 。

$$\frac{AE}{FA} = \frac{BD}{FD} \quad \text{即} \quad AE = \frac{3}{3+4} \times 3 = \frac{9}{7}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{陰影面積} &= \frac{AE \times BC}{2} \\ &= \frac{18}{7} \end{aligned}$$



9. **【96】**

設 $\angle P = \angle PRM = x$ ， $\angle Q = \angle QRM = y$ ，則 $2x + 2y = 180^\circ$ ，即 $x + y = 90^\circ$ ，
因此

$\triangle PQR$ 為一直角三角形，

設 $PR = m$ ， $QR = n$ ，得 $PQ^2 = (10 + 10)^2 = 400$

$$m + n = 48 - (10 + 10) = 28$$

因此

$$(m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn$$

$$(28)^2 = 400 + 2mn$$

$$mn = 192$$

$$\triangle PQR \text{ 的面積} = \frac{mn}{2} = 96$$

10. **【28】**

可證實八進制的數能被 7 整除的條件是數位之和要能被 7 整除。

故此 9 位數由 7 個 4 及 2 個 0 組成，且首位必為 4，餘下 8 位數中有 6 個 4，

共有 $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ 種情形。

11. 【120】

根據花圃的區域分佈及相鄰區域不能栽種同樣顏色的玫瑰花的條件，得知：不多於 3 個區域能栽種同樣顏色的玫瑰花。

能栽種同樣顏色玫瑰花的分佈及可能情況如下：

情況 1: (1, 4 區同色) 及 (2, 5 區同色)

情況 2: (1, 4 區同色) 及 (2, 6 區同色)

情況 3: (1, 6 區同色) 及 (2, 5 區同色)

情況 4: (1, 6 區同色) 及 (4, 5 區同色)

情況 5: (2, 6 區同色) 及 (4, 5 區同色)

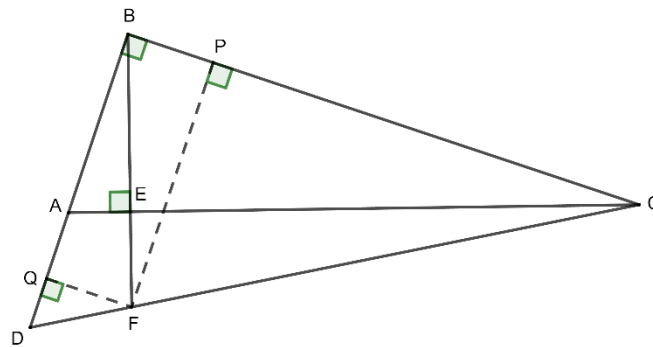
每個情況的栽種方法皆有 24 個。

(例：情況 1 中，因為 1, 4 區同色及 2, 5 區同色，所以可不理會 4、5 區的顏色，剩餘 1、2、3、6 四區的顏色組合有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 種。)

因此，栽種方法共有 $24 \times 5 = 120$ 種。

12. 【14:1】

根據下圖：



設 P 及 Q 分別為由 F 至 CB 及 BD 的垂足。

由於 $BC = 4BA$ 及 $BA = 7AD$ ，因此 $\frac{BC}{BD} = \frac{28}{8}$

由於 $\triangle FPB \sim \triangle CBA$ ，因此 $\frac{PF}{BP} = \frac{4}{1}$

$$\begin{aligned} \frac{CF}{FD} &= \frac{\triangle CBF \text{面積}}{\triangle DBF \text{面積}} = \frac{\frac{1}{2}(BC)(PF)}{\frac{1}{2}(BD)(QF)} = \left(\frac{BC}{BD}\right)\left(\frac{PF}{BP}\right) \\ &= \left(\frac{28}{8}\right)\left(\frac{4}{1}\right) = 14 \end{aligned}$$

因此， $CF:FD = 14:1$ 。

13. **【 $\frac{49}{6}$ 】**

根據下圖：

QP 與 RP 的延線分別與 AD 及 CD 相交於 H 及 K 。

設 $PQ = x$ 及 $PR = y$ ，而 $\triangle PHE \sim \triangle FKP$

因此， $\frac{EH}{HP} = \frac{PK}{KF}$

$$\frac{y-1}{4-x} = \frac{4-y}{x-2}$$

$$(y-1)(x-2) = (4-y)(4-x)$$

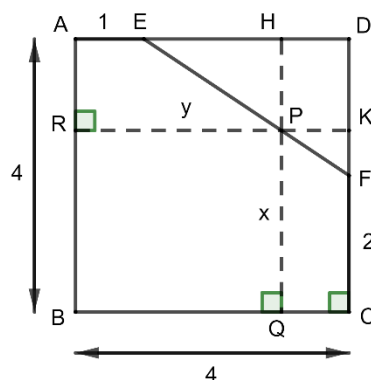
$$y = 7 - \frac{3x}{2}$$

$BQPR$ 的面積 $= xy$

$$= x\left(7 - \frac{3x}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{49}{6}$$

因此，當 $x = \frac{7}{3}$ ， $BQPR$ 的最大面積 $= \frac{49}{6}$ 。



14. **【8】**

2 的指數的個位分別為：2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6...

由於 11 是奇數， 3^{11} 除以 4 時，餘數是 3。

因此 $2^{3^{11}}$ 的個位是 8。

15. 【15 cm²】

根據下圖：

設 $\triangle MBD$ 面積 = a 及 $\triangle NBD$ 面積 = b

$\triangle MAD$ 面積 = $\triangle MBD$ 面積 = a

($\because AM = MB$)

$\triangle NCD$ 面積 = $3 \times \triangle NBD$ 面積 = $3b$

($\because CN = 3NB$)

$\triangle ACD$ 面積 = $3 \times \triangle ABD$ 面積 = $3(a + a) = 6a$

($\because CN = 3NB$)

另一方面，

$\triangle ACD$ 面積 = $\triangle BCD$ 面積 ($\because AM = MB$)

$$6a = 4b$$

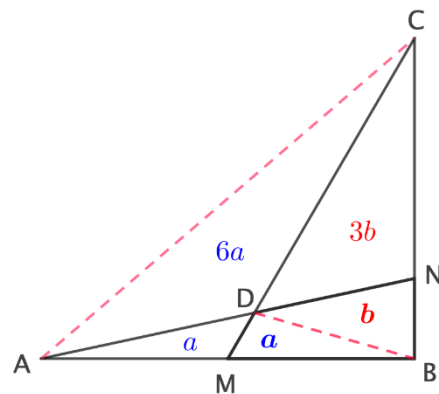
$$b = \frac{3}{2}a$$

因此， $ABCD$ 面積 = $a + a + b + 3b = 2a + 4(\frac{3}{2}a) = 8a$

$$8a = 48$$

$$a = 6$$

$$MBND \text{ 的面積} = a + b = 6 + (\frac{3}{2})(6) = 15 \text{ cm}^2$$



16. 【49.5 cm²】

根據對稱性質， $AHKC$ 的面積 = $DKHB$ 的面積。

設 $HB = x$ ，則 $AH = HD = 12 - x$ 。

$$(12 - x)^2 = x^2 + 6^2$$

$$144 - 24x + x^2 = x^2 + 36$$

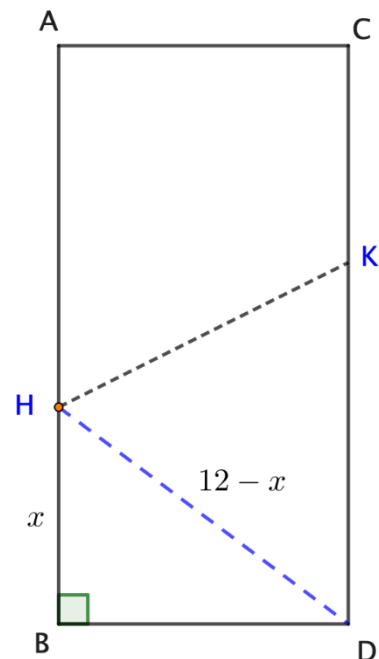
$$24x = 108$$

$$x = \frac{9}{2}$$

五邊形 $BDCKH$ 的面積

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 6 + \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 6$$

$$= 49.5 \text{ cm}^2$$



17. 【2034 年】

2023 年 1 月 1 日是星期日，
2024 年 1 月 1 日是星期一， (2023 年有 365 日， $365 \div 7 = 52 \dots 1$)
2025 年 1 月 1 日是星期三， (2024 年有 366 日， $366 \div 7 = 52 \dots 2$)
2026 年 1 月 1 日是星期四， (2025 年有 365 日， $365 \div 7 = 52 \dots 1$)
2027 年 1 月 1 日是星期五， (2026 年有 365 日， $365 \div 7 = 52 \dots 1$)
2028 年 1 月 1 日是星期六， (2027 年有 365 日， $365 \div 7 = 52 \dots 1$)
2029 年 1 月 1 日是星期一， (2028 年有 366 日， $366 \div 7 = 52 \dots 2$)
2030 年 1 月 1 日是星期二， (2029 年有 365 日， $365 \div 7 = 52 \dots 1$)
2031 年 1 月 1 日是星期三， (2030 年有 365 日， $365 \div 7 = 52 \dots 1$)
2032 年 1 月 1 日是星期四， (2031 年有 365 日， $365 \div 7 = 52 \dots 1$)
2033 年 1 月 1 日是星期六， (2032 年有 366 日， $366 \div 7 = 52 \dots 2$)
2034 年 1 月 1 日是星期日， (2033 年有 365 日， $365 \div 7 = 52 \dots 1$)

因此，下一次 1 月 1 日是星期日會是 2034 年。

18. 【5】

數字 1223334444...999999999 共包含了 $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ 個位，不足 2023 個位。

數字 1010...101111...11...nn...n 共包含了

$$2 \times (10 + 11 + \dots + n) = 2 \times \frac{(10+n)(n-9)}{2} = n^2 + n - 90 \text{ 個位，其中 } n < 100。$$

因此，數字 1223334444...nnn...n 共包含了 $n^2 + n - 90 + 45 = n^2 + n - 45 = n(n+1) - 45$ 個位，大約等於 n 的平方。

而 2023 的平方根為 44.97...。因此，得出 n 為 45。

數字 122333...1010...1111...4444...44 共包含了 $442 + 44 - 45 = 1935$ 個數字，仍需 88 ($= 2023 - 1935$) 個數才夠 2023。

因為 88 是偶數，因此第 2022 個位是 5。

乙部 (每題 6 分)

19. 【1352】

設該兩個兩位數為 x 及 y 。

則 $100x + y = 2xy$

$$y = (2y - 100)x$$

所以 y 為 x 的倍數，可設 $y = tx$ 。(當中 t 為正整數)。

代入原式得 $100 + t = 2tx$ ，即 $x = \frac{100+t}{2t} \geq 10$ 。故 $t \leq \frac{100}{19}$ ，即 $t = 1, 2, 3, 4, 5$ 。

只有 $t = 4$ 符合題意，有 $x = 13$ 及 $y = 52$ ，所求的四位數為 1352。

20. 【(5, 20), (6, 12) 或 (8, 8)】

正 m 邊形內角及正 n 邊形內角分別為 $180^\circ - \frac{360^\circ}{m}$ 及 $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{m} + 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\frac{360^\circ}{m} + \frac{360^\circ}{n} = 90^\circ$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$$

$$\text{已知 } \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

已知 $m \leq n$ ，可知 $4 \leq m \leq 8$

$(m, n) = (5, 20), (6, 12)$ 或 $(8, 8)$

21. (a) 【 N 的首個數字必定是 3。】

設 N 為一個 k 位數，而首位及尾位數分別為 a 及 b 。

由於 N 的兩倍減 1 所得的數等於 N 原來的數字的倒序，因此， $2N-1$ 同樣是 k 位數。由此， $2N$ 亦有 k 個位。

(若 $2N-1 = 999\dots 9$ (k 個位)， $2N = 100\dots 0$ ($k+1$ 個位)， $N = 500\dots 0$ (k 個位)，但此情況中， $2N-1$ 的數不等於 N 的倒序。)

由於 N 的位數與 $2N$ 的位數相同，因此， $a < 5$ 。同時， N 的兩倍減 1 後的尾數是 a ，即 a 必定是單數，只可以等於 1 或 3。

若 a 等於 1，則 $2N-1$ 的第一個數(b)是 2 或 3，尾數(a)是 1。

$2N$ 的尾數是 2，得出 N 的尾數(b)必定是 1 或 6。

此情況下， $2N-1$ 的第一個數(b)與 N 的尾數(b)不可能相等。

因此， N 的首個數字(a)必定是 3。

(b) 【 N 的最末數字必定是 7。】

若 $a = 3$ ，則 $2N-1$ 的尾位數為 3 而 $2N$ 的尾位數為 4，以此可得 b 為 2 或 7。因 b 同樣是 $2N-1$ 的首位數，與 $2N$ 的情況相同，因為 $a = 3$ ， b 只能是 6 或 7。由此可得 $b = 7$ 。

(c) 【 N 的可能值: 37、397、3997、39997、399997、...，

即 $N = 4 \times 10^k - 3$ ，其中 k 為正整數。】

設 $N = 3 \times 10^{k-1} + 10M + 7$ 。

現證明($k-2$)位數 M 的所有位數必定是 9，即 $N = 4 \times 10^k - 3$ ：

由於 $2N-1 = 6 \times 10^{k-1} + 20M + 13 = 7 \times 10^{k-1} + 10M^* + 3$ ，

其中 M^* 是把 M 的所有位數倒序而成，可見 M 是一個($k-2$)位數，能滿足

$$2M + 1 = 10^{k-2} + M^*。$$

使用與先前相似的論證，可證明 M 的首位及尾位數必為 9。因此可把 M 寫作 $9 \times 10^{k-3} + 10T + 9$ 。由此，

$$2M + 1 = 18 \times 10^{k-3} + 20T + 19 = 19 \times 10^{k-3} + 10T^* + 9，$$

其中 T^* 是把 T 的所有位數倒序而成。

因此， T 是一個($k-4$)位數，能滿足與 M 相同的特性，使得

$$2T + 1 = 10^{k-4} + T^*。$$

循此途徑重覆推論，可以證明 M 的所有位數必定是 9。

反之，若 $N = 4 \times 10^k - 3$ ，則 $2N-1$ 是把 N 所有位數倒序而成的數。

~ 全卷完 End of paper ~

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、洪進美校長、馮德華老師、
徐崑玉老師、郭家強老師、譚志良先生、葉正皓老師