香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2018 – 2019

題解 Solution

甲部 (每題 2 分)

1 【0】

由於 15 是 3 的倍數，因此，3 的倍數不會與 15 互質。

2 【1】

2018 是偶數，2018^{2019}是 4 的倍數。

2017 的次方，個位數以 7、9、3、1 循環。

3 【502】

$10^n = (2^n)(5^n)$，而 5 的倍數比 2 的倍數少。

$\left\lfloor\frac{2019}{5}\right\rfloor = 403,\ \left\lfloor\frac{2019}{25}\right\rfloor = 80,\ \left\lfloor\frac{2019}{125}\right\rfloor = 16,\ \left\lfloor\frac{2019}{625}\right\rfloor = 3$。

共有$403 + 80 + 16 + 3 = 502$

4 【4080400】

$(2019)^{2019} = (3\times673)^{2019} = 3^{2019}\times673^{2019}$。

$3^0\times673^0$、$3^0\times673^1$、…、$3^0\times673^{2019}$、

$3^1\times673^0$、$3^1\times673^1$、…、$3^1\times673^{2019}$、

………

$3^{2019}\times673^0$、$3^{2019}\times673^1$、…、$3^{2019}\times673^{2019}$ 等都是 2019^{2019} 的因數，

因此，2019^{2019} 可以被 2020×2020= 4080400 個正整數整除。

5 【316】

運氣最差的情況是抽到 5 種顏色的波子各 63 粒，即抽出了 315 粒波子，這時再抽出任意一粒波子就能保證有 64 粒波子的顏色是相同的。所以至少要抽出 316 粒波子才能確保必定抽到 64 粒相同的波子。

6　【28】

把方程寫成 $3n + 6m = mn$。

$6m = mn - 3n = n(m-3)$

$n = \frac{6m}{m-3} = \frac{6(m-3)+18}{m-3} = 6 + \frac{18}{m-3}$

$\frac{18}{m-3}$ 必為整數，故 $m - 3 = 1$，2，3，6，9 或 18。

結論：

即 $\begin{cases} m = 21 \\ n = 7 \end{cases}$，$\begin{cases} m = 12 \\ n = 8 \end{cases}$，$\begin{cases} m = 9 \\ n = 9 \end{cases}$，$\begin{cases} m = 6 \\ n = 12 \end{cases}$，$\begin{cases} m = 5 \\ n = 15 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = 4 \\ n = 24 \end{cases}$ 。

因此，$m + n$ 的最大值是 28。

7　【50】

這 20 個正整數的和$= 20\times19 = 380$

五個數之和的最大值$=380 - (1+2+3+\ldots+15) = 260$。

因為 $260 = 54+53+52+51+50$，

所以第五個整數的最大值是 50。

8　【30】

$6xy + 20 = 2(3xy + 10)$

偶數有$(3xy + 10) - (3xy - 19) + 1 = 30$ 個

9　【30】

設第一隊有 x 人，則第二及第三隊分別有 $\frac{3}{4}x$ 及 $\frac{4}{5}x$ 人。此三隊共有 $\frac{51}{20}x$ 人。

由於人數只可為整數，故 x 只可以是 20 的倍數。

由於三隊人數不可超過 2019，故三隊只可共有 $\frac{51}{20}\times780 = 1989$ 人。

驗算得第一隊 780 人，第二隊 585 人，第三隊 624 人，那麼第四隊有 30 人。

10　【10】

不同的方法共有 $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times1 = 10$ 種。

11 【32】

設三角形 XYZ 的底長為 $2x$，底邊上的高為 y，則

$$\begin{cases} xy = 48 \\ 2\sqrt{x^2+y^2} = 2x+y \end{cases} \text{，解得} \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases} \text{。}$$

所以三角形 XYZ 的周界= $2(6)+8+2(6)=32$

12 【114】

當該 3 個數為 398、 467 及 512 (或 398、 476 及 512) ，差為最小。

該差的最小可能值

= 512 – 398 = 114

13 【720192】

$24=3\times8$而 3 與 8 互質，因為$\overline{a2019b}$能被 3 和 8 整除，所以末三位數是 8 的倍數，b 只能是 2。

該六位數便會是$\overline{a20192}$。而$a+2+0+1+9+2$的值需要是 3 的倍數，所以 a =1、4 或 7。

因此，該六位數的最大值是 720192。

14 【2】

設該 2019 個連續偶數為 2a, 2a+2, 2a+4, …, 2a+4036，

則 2a + 2a+2 + 2a+4 + … + 2a+4036

= 2(2019a) + 2(1 + 2 + … + 2018)

= 2(2019a) + $2\times\frac{(1+2018)(2018)}{2}$

= 2019(2a) + 2019(2018)

= 2019(2)(a + 1009)

因此，$2019N^2$ = 2019(2)(a + 1009)

N^2 = (2)(a + 1009)，(a + 1009)最少可等於 2

N 的最小值 = 2

15 【3998】

$\{a_n\}$ = {2019, 1999, –20, –2019, –1999, 20, 2019, 1999, –20, …}六次循環，且六個連續項之和為零，因此

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2016} + a_{2017} + a_{2018} + a_{2019}$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2016}) + 2019 + 1999 – 20$

= 3998

16 【80】

(x – y) : (x + y) : xy = 1 : 9 : 40

$$\frac{x-y}{1}=\frac{x+y}{9}=\frac{xy}{40}$$

$\begin{cases} x+y=9(x-y) \\ xy=40(x-y) \end{cases}$，故 $\begin{cases} 8x=10y \\ xy=40x-40y=40x-32x=8x \end{cases}$。

x(y – 8) = 0

y = 8，x = 10，xy = 80。

17 【10】

因1229為奇數，a和b其中必有一個是2，經驗算得 $2^2+5^2 7^2=1229$，所以 $b+c-a$ = 5 + 7– 2 =10。

18 【2694】

若卡紙上數字之和最少的一個袋取最大值，袋中卡紙上數字之和就要愈接近，先將 $(1,1346),\ (2,1345),\ (3,1344),\cdots,\ (672,675),\ (673,674)$ 分別分配到各袋中，使各袋中卡紙上數字之和為 1347；

再將 1347, 1348, 1349, …, 2019 分別放入袋中，

袋中卡紙上數字之和最少的一個袋的最大值 $=1347+1347=2694$。

乙部　(每題 6 分)

19　此題目已取消。

20　設圓半徑為 r。

三角形邊長　$= (r+\frac{r}{\tan 30^\circ})\times 2 = 2r(1+\sqrt{3})$

三角形的高　$= \sqrt{\left[2r(1+\sqrt{3})\right]^2 - \left[r(1+\sqrt{3})\right]^2} = \sqrt{3}(1+\sqrt{3})r$

三角形的面積　$= \dfrac{2r(1+\sqrt{3})\times\sqrt{3}(1+\sqrt{3})r}{2}$

$= r^2(4\sqrt{3}+6)$

陰影部分的面積　$= r^2(4\sqrt{3}+6)-3\pi r^2 = (4\sqrt{3}+6-3\pi)r^2$

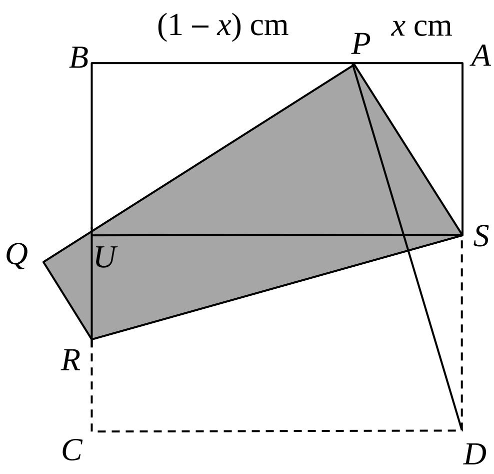
$(4\sqrt{3}+6-3\pi)r^2 = (16\sqrt{3}+24-12\pi)$

$= 4(\sqrt{3}+6-3\pi)$

$\therefore$　$r = 2$

三角形的周界 $= 2(2)(1+\sqrt{3})\times 3 = 12(1+\sqrt{3})$ cm

21



(a) 利用摺紙的對稱性，可得 $RS \perp PD$。

設 U 為 BC 上的一點使得 $US // BA$。我們可證明 $\Delta APD \cong \Delta URS$。

$RS^2 = PD^2 = 1 + x^2$

即　$RS = \sqrt{1+x^2}$ cm

設 $PS = y$ cm。 則 $SD = PS = y$ cm 及 $AS = (1-y)$ cm。

考慮 ΔAPS， $x^2 + (1 - y)^2 = y^2$

$$y = \frac{1 + x^2}{2}$$

即 $PS = \dfrac{1 + x^2}{2}$ cm

$$\begin{aligned} QR &= RC \\ &= SD - UR \\ &= \frac{1 + x^2}{2} - x \\ &= \frac{1 - 2x + x^2}{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

(b) 梯形 $PQRS$ 的面積 $= \frac{1}{2}(PS + QR) \times PQ = \frac{1}{2}(PS + QR)$

$$= \frac{1 - x + x^2}{2} \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} [1 - x(1 - x)] \text{ cm}^2$$

由於 x 為 0 與 1 之間，當 $x = 0$ 或 1 時，面積為最大，即 P 在 A 或 B 上，最大面積為 $\frac{1}{2}$ cm^2 。

(c) 梯形 $PQRS$ 的面積 $= \dfrac{1 - x + x^2}{2}$ cm^2

$$= \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\right] \text{ cm}^2$$

當 $x = \frac{1}{2}$ 時，面積為最小，即

P 在 AB 的中點上，最小面積為 $\frac{3}{8}$ cm^2 。

~ 全卷完 End of paper ~

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、馮德華老師、徐崑玉老師、郭思齊老師、黃偉冠老師、黃德鳴老師