香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2017 – 2018

題解 Solution

甲部 (每題 2 分)

1 【$(2018x+1)(x-2018)$】

$$2018x^2-(2018^2-1)x-2018$$
$$=(2018x^2-2018^2x)+(x-2018)$$
$$=2018x(x-2018)+(x-2018)$$
$$=(2018x+1)(x-2018)$$

2 【2017】

設 $x=2015$。

$$\sqrt{1+(x+3)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+1)(x-1)}}}$$
$$=\sqrt{1+(x+3)\sqrt{1+(x+2)x}}$$
$$=\sqrt{1+(x+3)(x+1)}$$
$$=x+2$$
$$=2017$$

3 【1】

$2^{xy}=2018^y$ 及 $1009^{xy}=2018^x$，得 $2018^{xy}=2018^{x+y}$，

$\therefore xy=x+y$，

因此，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=1$。

另解：$2=2018^{\frac{1}{x}}$ 及 $1009=2018^{\frac{1}{y}}$，得 $2018=2018^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$，

因此，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$。

4 【14】

$(N-2)180^\circ-180^\circ<2018^\circ<(N-2)180^\circ$

$(N-3)180^\circ<2018^\circ<(N-2)180^\circ$

得 $14.2>N>13.2$

因此，$N=14$。

5 【75】

由三角不等式，得第三邊的長度必少於 20+18 = 38，

即第三條邊長度 = 37 (整數)。

因此，該三角形最大的周界 20 + 18 + 37 = 75.

6 【2021】

$abcd = 2018 = 1\times1\times1\times2018 = 1\times1\times2\times1009$

因此，$a+b+c+d$ 的最大值 $=1+1+1+2018=2021$。

7 【1019】

$2018-999=1019$ 粒白色波子。

8 【2019】

因 $15=3\times5$，所以 只有 7^i 個因子與 15 互質，$i = 0, 1, 2, \cdots, 2018$

即 2019 個因子與 15 互質。

9 【4】

在不重覆使用數字 2、0、1 及 8 的情況下得的所有四位數: 1028, 1082, 1208, 1280, 1802, 1820, 2018, 2081, 2108, 2180, 2801, 2810, 8012, 8021, 8102, 8120, 8201, 8210.

數字除以 11 後，餘數是 4：1082, 1280, 8012, 8210。

10 【45°】

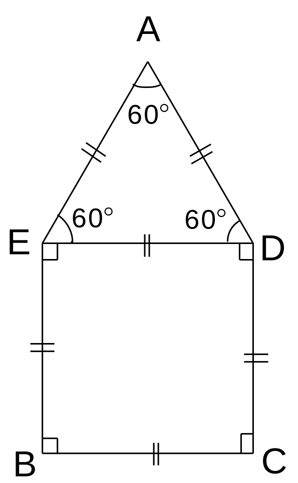


圖 1

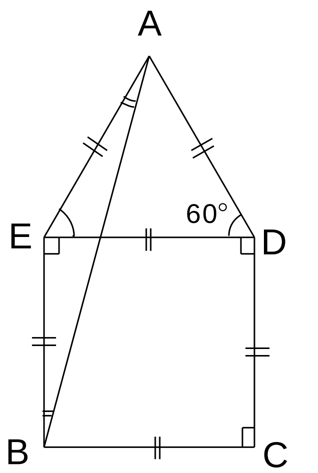


圖 2

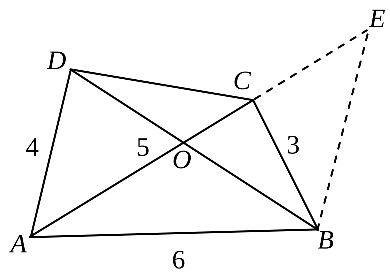
圖 1 為一個由一個等邊三角形及一個正方形組成的五邊形，連接 AB 後，四邊形 $ABCD$ 就如題中的四邊形一樣。

因 ΔABE 為等腰三角形，所以 $\angle EBA = \dfrac{180^\circ-60^\circ-90^\circ}{2} = 15^\circ$，

因此，題中的 $\angle A = \angle BAD = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$。

11　【$\dfrac{10}{9}$】

如圖，過 B 作 $BE//AD$ 並與 AC 的延線交於 E。



則 $\angle ABE = 180^{\circ} - \angle BAD = \angle ACB$。

因此容易看出 $\Delta ABC \sim \Delta AEB$，故 $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{EB}$ 。

即 $EB = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{6 \times 3}{5} = \dfrac{18}{5}$ 。

另因 $BE//AD$，因此，$\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{AD}{BE} = \dfrac{4}{\left(\dfrac{18}{5}\right)} = \dfrac{10}{9}$ 。

12　【10】

由題意知 $9^m - 9^n = 9^n\,(9^{m-n} - 1)$ 為 100 的倍數。即 $(9^{m-n} - 1)$也為 100 的倍數，故 9^{m-n} 的末兩位數為 01。

明顯地 $m - n$ 必須為偶數，設 $m - n = 2p$ (p 為正整數)，則 $9^{m-n} = 9^{2p} = 81^p$。

現在知道 81^2、81^3、81^4、81^5 的末兩位數依次為 61、41、21、01，

因此，$m - n = 2p$ 最小值為 $2(5) = 10$。

13　【4】

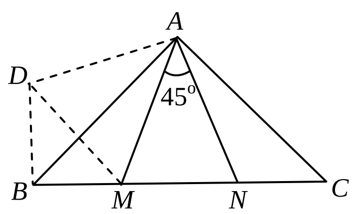
將ΔANC 繞點 A 順時針方向轉 90° 至ΔADB，聯結 MD。

則 $\angle MBD = 90^{\circ}$ 及 $\Delta NAM \cong \Delta DAM$，故 $MN = MD$。

現在 $BC = (6\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 12$ 、$MN + NC = MC = 12 - 3 = 9$。 ---- (1)

由 $BD^2 + BM^2 = DM^2$，得 $NC^2 + 3^2 = MN^2$。 ---- (2)

解(1)及(2)得 $NC = 4$ 及 $MN = 5$。



14　【454】

設四位數為 $433a + r$ $(0 \le r \le 432)$。因 $433 \times 24 = 10392 > 9999$，所以 $a \le 23$。

當 $a = 23$ 時，$433 \times 23 + 40 = 9999$，即 $a + r = 23 + 40 = 63$。

當 $a = 22$ 時，$433 \times 22 + 432 = 9958$，即 $a + r = 22 + 432 = 454$。

因此，$a + r$ 的最大值為 454。

15　【27】

$(n^2-5n+5)^{n+1}=1$ 有三個可能：

(1) $n^2-5n+5=1$，得 $n=1$ 或 4。

(2) $n^2-5n+5=-1$，且 $n+1$ 為偶數，得 $n=3$。

(3) $n+1=0$，且 $n^2-5n+5\neq 0$，得 $n=-1$。

因此，所求數值為 $1^2+4^2+3^2+(-1)^2=27$。

16　【$\frac{27}{5}$】

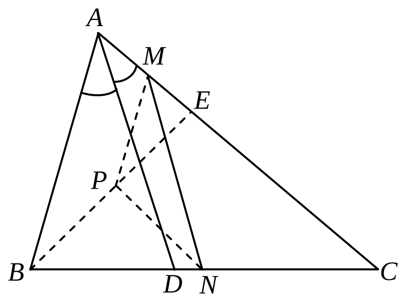
解：如圖，聯結 BE 並取 BE 的中點 P，聯結 PM 及 PN。

由中點定理得 $PM//AB$ 及 $PM=\frac{1}{2}AB$。同理得 $PN//CE$ 及 $PN=\frac{1}{2}CE$。

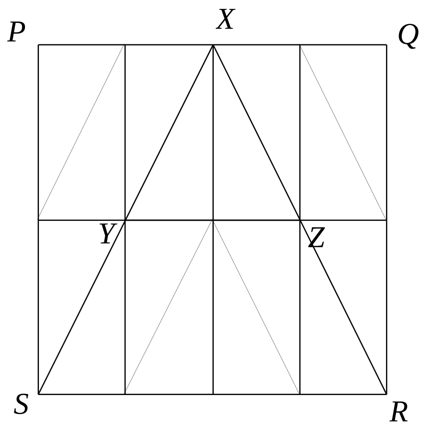
因為 $AB=CE=8$，故 $PM=PN$ 並有 $\angle PMN=\angle PNM=\angle NMC$。

再由 $\angle CAD=\frac{1}{2}\angle CAB=\frac{1}{2}\angle CMP=\angle CMN$ 得 $MN//AD$。

最後由 $\frac{MN}{AD}=\frac{MC}{AC}$ 得 $MN=\frac{8+1}{10}\times 6=\frac{27}{5}$。



17　【54】



$\frac{12\times 12}{16}=9$

因此，梯形 $RSYZ$ 的面積 $=6\times 9=54$

18　【2018 = 503 + 504 + 505 + 506】

2018 不能為兩個連續整數之和，因兩個連續整數之和必為奇數。它也不能為三個連續整數之和，因三個連續整數之和必為 3 的倍數。

考慮四個連續整數 n、 $n+1$、 $n+2$ 及 $n+3$ 之和，我們可得出

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) + (n+3) &= 2018 \\ 4n + 6 &= 2018 \\ n &= 503 \end{aligned}$$

因此， 2018 = 503 + 504 + 505 + 506。

乙部 (每題 6 分)

19 (a) 5

(b)

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

1	3	4
2	5	6

1	3	5
2	4	6

20 (a) 37 名學生留下來；編號是 54、108、162、...、1944、1998；

(b) 第六次報數後，只有 1458 留下來。

第一次報數後，6、12、18、...、2010、2016 留下來，$\frac{1009}{3} \approx 336.3 \to 336$ 名；

第二次報數後，18、36、54、...、1998、2016 留下來，共 $\frac{336}{3} = 112$ 名；

第三次報數後，54、108、162、...、1944、1998 留下來，共 $\frac{112}{3} \approx 37.3 \to 37$ 名；

第四次報數後，162、324、486、...、1782、1944 留下來；共 $\frac{37}{3} \approx 12.3 \to 12$ 名；

第五次報數後，486、972、1458、1944 留下來；共 $\frac{12}{3} = 4$ 名；

第六次報數後，只有 1458 留下來。

21　【邊長 $= 88$】

對於一個正方形數，其個位必為 0、 1、 4、 5、 6 或 9。

正方形面積的數值必須為以下三種可能情況的形式： (i) ABAB 或 (ii) ABBA 或 (iii) AABB，其中

$A \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 及 $B \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$。

情況 (i): ABAB

$$1000A + 100B + 10A + B = 1010A + 101B$$
$$= 101 \times (10A + B)$$

由於 101 為質數， 101 必為 $10A + B$ 的因數。這並不可能，因為 $10A + B < 100$。

情況 (ii): ABBA

$$1000A + 100B + 10B + A = 1001A + 110B$$
$$= 11 \times (91A + 10B)$$

由於 11 為質數， 11 必為 $91A + 10B$ 的因數。

$$91A + 10B = (99A + 11B) - (8A + B)$$
$$= 11 \times (9A + B) - (8A + B)$$

若 $A = 1$，則 $B = 3$，但 1331 不是完全平方數。

若 $A = 4$，則 $B = 1$，但 4114 不是完全平方數。

若 $A = 5$，則 $B = 4$，但 5445 不是完全平方數。

若 $A = 6$，則 $B = 7$，但 6776 不是完全平方數。

若 $A = 9$，則 $B = 7$，但 9779 不是完全平方數。

同樣地，這並不可能。

情況 (iii): AABB

$$1000A + 100A + 10B + B = 1100A + 11B$$
$$= 11 \times (100A + B)$$

由於 11 為質數， 11 必為 $100A + B$ 的因數。

$$100A + B = 99A + (A + B)$$

若 $B = 4$，則 $A = 7$，在這情況下， $7744 = 88^2$ 為完全平方數。

若 $B = 5$，則 $A = 6$，但 6655 不是完全平方數。

若 $B = 6$，則 $A = 5$，但 5566 不是完全平方數。

若 $B = 9$，則 $A = 2$，但 2299 不是完全平方數。

因此，只有一個這種正方形，其邊長為 88，面積為 7744。

~ 全卷完 End of paper ~

擬題委員會：蕭文強教授(香港大學)、吳端偉系主任(香港大學)、
李文生博士(香港大學)、 馮德華老師、徐崑玉老師、
鄭永權老師、郭家強老師、潘維凱老師