香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2016 – 2017

建議題解

甲部 (每題 2 分) 把答案填在答題紙所提供的位置。

1 **【4034】**

$2018\times20172017-2017\times20182016$

$=2018\times20170000+2018\times2017-2017\times20180000-2017\times2016$

$=2018\times2017-2017\times2016$

$=2\times2017$

$=4034$

2 【1】

$2017^1\to7$ ，$2017^2\to9$ ，$2017^3\to3$ ，$2017^4\to1$ ，……

注意各乘積的個位數 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, é ，周期為 4。

因為 $2016\div4$ 的餘數為 0，

因此 2017^{2016} 的個位數與 2017^4 的個位數相同，即是 1。

3 【$\dfrac{1}{2016}$】

設 a = 2017

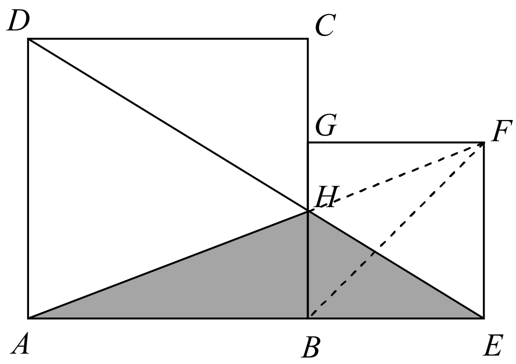
$$\frac{(a^2-2a-8)(a^2-a-2)}{(a-4)(a-2)(a-1)(a+1)(a+2)}$$

$$=\frac{(a-4)(a+2)(a-2)(a+1)}{(a-4)(a-2)(a-1)(a+1)(a+2)}$$

$$=\frac{1}{a-1}$$

$$=\frac{1}{2016}$$

4 【9】



留意 A、H、 F 共線，ΔBEH 的面積 與 ΔBFH 為等底等高三角形，所以 ΔABF 的面積 $=72$。

$\therefore \dfrac{16\times EF}{2}=72$ ，因此，$EF=9$

5 【18】

百位是 1 的三位數有：

102、120、107、170、127、172 共六個

百位是 2 的三位數有：

201、210、207、270、217、271 共六個

百位是 3 的三位數有：

701、710、702、720、721、712 共六個

因此，共 6+6+6 = 18 個三位數。

6 【星期四】

該年 7 月 31 日必是星期六，7 月 3 日亦是星期六，

因此，該年 7 月 1 日是星期四。

7 【48】

設 $AB=x$, $AD=y$

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}xy$$

$$x^2y^2-4xy(x+y)+8xy=0$$

$$(x-4)(y-4)=8$$

$\therefore (x,y)=(8,6)$ 或$(12,5)$

長方形 $ABCD$ 的面積 $=48$ 或 60，因此，S 的最小值 $=48$ 。

8 【$\dfrac{1008}{2015}$】

不失一般性，設這 2016 個真分數由大至少依次為 a$_1$、a$_2$、é é 、a$_{2016}$ 及它們的和為 S，所以

$$\begin{cases} S - a_1 = \dfrac{1}{2017} \\ S - a_2 = \dfrac{2}{2017} \\ \quad\cdots\cdots \\ S - a_{2016} = \dfrac{2016}{2017} \end{cases}$$

$$\therefore 2016S - S = \frac{(1+2016)2016}{2(2017)}$$

因此，$S = \dfrac{1008}{2015}$

9 【39】

(1) $\overline{aaa}$： a 可以是 1 至 9 的任何一個數字 ------>有 9 個

(2) $\overline{aa(2a)}$： a 可以是 1 至 4 的任何一個數字 ------>有 4×3=12 個

(3) $\overline{a(2a)(3a)}$： a 可以是 1 至 3 的任何一個數字 ------>有 3×2×3=18 個

因此，共 9+12+18=39 個。

10 【36°】

設 $\angle BAC = \alpha$。

由於 $AD = DC$ 及 $AE = EB$，我們可得出

$\angle DAC = \angle DCA = \alpha$ 及 $\angle EAB = \angle EBA = \alpha$。

留意 $\angle BEC = \angle BAE + \angle ABE = \alpha + \alpha = 2\alpha$。

由於 $BC = BE$，$\angle BCE = 2\alpha$。

同樣地，$\angle CBA = 2\alpha$。

由此，對於 ΔABC，我們可得出

$$180^\circ = \alpha + 2\alpha + 2\alpha$$
$$\alpha = 36^\circ$$

11 【468】

注意到 $M = 1! \times 2! \times \cdots \times 10! = 2^9 \times 3^8 \times 4^7 \times 5^6 \times 6^5 \times 7^4 \times 8^3 \times 9^2 \times 10$

$= 2^{38} \times 3^{17} \times 5^7 \times 7^4$。

若一立方數 n 為 M 的因子，

則 $n = 2^{3x} \times 3^{3y} \times 5^{3z} \times 7^{3u}$，當中 x、y、z、u 為非負整數且 $3x \le 38$、$3y \le 17$、$3z \le 7$、$3u \le 4$。

這樣的 n 共有 $13 \times 6 \times 3 \times 2 = 468$ 個。

12 【$\sqrt[3]{4000}$ 或 15.87】

因水面正好是在剛才側面畫上水位高度的標誌位置，水的體積剛好是圓錐體體積的一半。

設最後水位的高度為 x cm。

利用相似圖形公式

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{x}{20}\right)^3$$

$$x^3 = \frac{8000}{2}$$

因此，$x = \sqrt[3]{4000}$

13 【2 分鐘】

從開始至第一次相遇，小明和小華合共走了半個圓。從第一次相遇至第二次相遇，小明和小華合共走了一個圓。如果從開始至第一次相遇用了 1 分鐘，從第一次相遇至第二次相遇便用了 2 分鐘。

14 【89】

$\{1,2,3\} \rightarrow \{5,2,3\} \rightarrow \{5,8,3\} \rightarrow \{5,8,13\} \rightarrow \{21,8,13\} \rightarrow \{21,34,13\} \rightarrow \{21,34,55\} \rightarrow \{89,34,55\}$

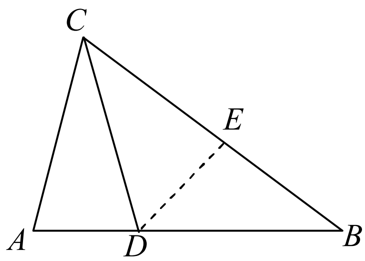
15 【13】

由 $\angle A = 2\angle B$，知 $BC > AC$。如圖在 BC 上取點 E 使得 $EC = AC$，連接 DE。

明顯得 $\Delta CED \cong \Delta CAD$。故 $ED = AD$。

$\angle BDE = \angle CED - \angle DBE = \angle A - \angle B = \angle B = \angle DBE$。故 $BE = DE$。

因此，$BC = BE + CE = DE + CA = AD + AC = 2 + 11 = 13$。



16　【$\frac{50}{3}$】

注意到 ΔABC 是以 B 為直角的直角三角形。故我們可將圖設置在直角坐標系中使得 $A = (0, 3)$，$B = (0, 0)$，$C = (4, 0)$。

設 $X = (m, n)$，則 $AX^2 + BX^2 + CX^2$

$$= [(m-0)^2 + (n-3)^2] + [(m-0)^2 + (n-0)^2] + [(m-4)^2 + (n-0)^2]$$

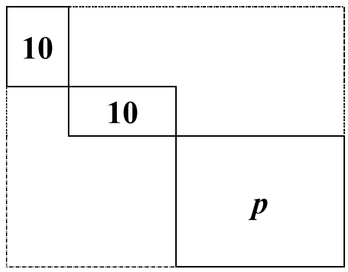
$$= 3m^2 + 3n^2 - 6n - 8m + 25$$

$$= 3\left[\left(m - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right] + 3\left[(n-1)^2 - 1\right] + 25$$

$$= 3\left(m - \frac{4}{3}\right)^2 + 3(n-1)^2 + \frac{50}{3} \ge \frac{50}{3}$$

因此，$AX^2 + BX^2 + CX^2$ 的最小值為 $\frac{50}{3}$。

17　【(a) $\boldsymbol{p = 22}$ (b) $\boldsymbol{r = 12, s = 6, t = 14}$】



(a)　留意對角線中方格的數字總和等於大長方形的周界。(如右方的圖。)　因此可得出

$$10 + 10 + p = 16 + 10 + 16$$

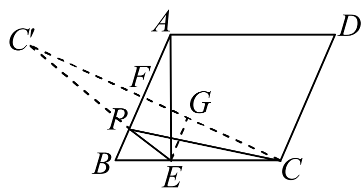
$$p = 22$$

(b)　留意每行中兩個相鄰方格的數字之差相等於另一行兩對應相鄰方格的數字之差，即

$$t - 10 = 10 - s = 20 - 16 \quad 及 \quad 16 - t = r - 10 = 22 - 20$$

$$t = 14 \ ， \ s = 6 \ ， \ r = 12$$

18　【$\frac{2\sqrt{745}}{5}$】



設 $AB = x$，則由 $\frac{4}{5}x = x\cos B = BE = x - 2$ 得 $x = 10$。

因此 $AE = \sqrt{10^2 - (10-2)^2} = 6$。

設 C' 是 C 關於 AB 的對稱點，則 $PC = PC'$。

故 $PE + PC = PE + PC' \ge EC'$。

設 CC' 與 AB 交於點 F，過點 E 作 CC' 的垂線，垂足為 G。

則 $CC' = 2CF = 2AE = 12$。

因為 $\Delta CEG \sim \Delta ABE$，$\frac{CE}{AB} = \frac{EG}{BE} = \frac{CG}{AE}$。

故由 $\frac{2}{10} = \frac{EG}{8} = \frac{CG}{6}$ 得 $EG = \frac{8}{5}$ 及 $CG = \frac{6}{5}$。

因此，由畢氏定理得 $EC' = \sqrt{EG^2 + (CC' - CG)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(12 - \frac{6}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{745}}{5}$。

乙部　**(每題 6 分)**

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

19　　【3^6-1 或 728】

對於正整數 m 及 n $(n \ge m)$ ，我們有　hcf (m, n) = hcf $(m, n-m)$.

留意　$2046-2016=30$　及　$2016=67\times30+6$。

$$\begin{aligned}
&\text{hcf}\,(3^{2016}-1,\quad 3^{2046}-1)\\
&= \text{hcf}\,(3^{2016}-1,\quad 3^{2046}-1-(3^{2016}-1))\\
&= \text{hcf}\,(3^{2016}-1,\quad 3^{2046}-3^{2016})\\
&= \text{hcf}\,(3^{2016}-1,\quad 3^{2016}(3^{30}-1))\\
&= \text{hcf}\,(3^{2016}-1,\quad 3^{30}-1) \qquad [\text{留意 hcf}\,(3^{2016}-1,\quad 3^{2016})=1]\\
&= \text{hcf}\,(3^{30}-1,\quad 3^{2016}-1)\\
&= \text{hcf}\,(3^{30}-1,\quad 3^{1986}-1) \qquad [\text{利用同上相同的方法}]\\
&= \text{hcf}\,(3^{30}-1,\quad 3^{1956}-1)\\
&\qquad\vdots\\
&= \text{hcf}\,(3^{30}-1,\quad 3^{6}-1) \qquad [\text{由於 } 2016=67\times30+6]\\
&= \text{hcf}\,(3^{6}-1,\quad 3^{30}-1)\\
&= \text{hcf}\,(3^{6}-1,\quad 3^{24}-1)\\
&\qquad\vdots\\
&= \text{hcf}\,(3^{6}-1,\quad 3^{6}-1)\\
&= 3^6-1\\
&= 728
\end{aligned}$$

20　　【(a) 345 (b) 165】

(a)　從 21 至 50，依次將 3 個數為 1 組，共分成 10 組：

(21,22,23)，(24,25,26)，(27,28,29)，…，(45,46,47)，(48,49,50)，

再將 1 至 20 任意分在這 10 組數中，每組 2 個數，這時的 10 個中位數之和最大：

最大值 $=21+24+27+\cdots+48=\dfrac{69\times10}{2}=345$ 。

(b)　從 1 至 30，依次將 3 個數為 1 組，共分成 10 組：

(1,2,3)，(4,5,6)，(7,8,9)，…，(25,26,27)，(28,29,30)，

再將 31 至 50 任意分在這 10 組數中，每組 2 個數，這時的 10 個中位數之和最小：最小值 $=3+6+9+\cdots+30=\dfrac{33\times10}{2}=165$ 。

21

(a) 有很多可能答案。以下列出部分答案，其中 a_1、 a_2、 b_1、 b_2 分別表示面積為 A_1、A_2、 B_1、B_2 的正方形的邊長。

a_1	a_2	b_1	b_2	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$
7	5	5	1	**49**	**25**	**25**	**1**
8	7	4	1	**64**	**49**	**16**	**1**
8	4	7	1	**64**	**16**	**49**	**1**
9	7	6	2	**81**	**49**	**36**	**4**
9	6	7	2	**81**	**36**	**49**	**4**
13	11	8	4	**169**	**121**	**64**	**16**
13	8	11	4	**169**	**64**	**121**	**16**

(b) 有很多可能答案。以下列出部分答案，其中 a_1、 a_2、a_3、 b_1、 b_2 、b_3 分別表示面積為 A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3 的正方形的邊長。

a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_3}$	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$
13	8	7	11	4	1	**169**	**64**	**49**	**121**	**16**	**1**
19	13	11	16	8	4	**361**	**169**	**121**	**256**	**64**	**16**
22	18	17	14	6	1	**484**	**324**	**289**	**196**	**36**	**1**
23	9	7	22	6	2	**529**	**81**	**49**	**484**	**36**	**4**

(a) 詳解：

設對應正方形的邊長為 a_1、a_2、b_1 及 b_2 。

A_1ï A_2=B_1ï B_2

有很多可能答案及方法找出兩相等平方和，其中一個方法如下：

$$a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2$$

$$(a_1 + a_2)\,(a_1 - a_2) = (b_1 + b_2)\,(b_1 - b_2)$$

考慮 $12 \times 2 = 6 \times 4$，可得出 $(7 + 5)(7 - 5) = (5 + 1)(5 - 1)$ 。可得出 $a_1 = 7$ ， $a_2 = 5$， $b_1 = 5$， $b_2 = 1$，即 $A_1 = 49$ ， $A_2 = 25$， $B_1 = 25$，$B_2 = 1$。

考慮 $15 \times 1 = 5 \times 3$，可得出$(8 + 7)(8 - 7) = (4 + 1)(4 - 1)$ 。可得出 $a_1 = 8$， $a_2 = 7$， $b_1 = 4$， $b_2 = 1$，即 $A_1 = 64$ ， $A_2 = 49$， $B_1 = 16$， $B_2 = 1$。

設對應正方形的邊長為 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2 及 b_3。

(b) 有很多可能答案。根據**(a)**的想法，以下是其中一個方法：

選擇 $a_2 = 8$， $a_3 = 7$， $b_2 = 4$， $b_3 = 1$ ，則我們要找出 a_1 及 b_1 滿足

$$a_1^2 - 64 = b_1^2 - 16$$

$$(a_1 + b_1)(a_1 - b_1) = 48 = 24 \times 2 = (13 + 11)(13 - 11)$$

$$a_1 = 13 \quad , \quad b_1 = 11$$

因此，可得出 $A_1 = 169$， $A_2 = 64$，$A_3 = 49$， $B_1 = 121$， $B_2 = 16$， $B_3 = 1$。

~ 全卷完 End of paper ~

擬題委員會：蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、
李文生博士(香港大學)、 馮德華老師、徐崑玉老師、
鄭永權老師、郭家強老師、潘維凱老師