

香港青少年數學精英選拔賽

The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest

2011 – 2012

甲部 (每題 2 分)

把答案填在答題紙所提供的位置。

1. If $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2011^3 + 2012^3$, what is the last digit of A ?

若 $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2011^3 + 2012^3$ ， A 的末位數字是甚麼？

2. It is given that integer N is formed by “2012” k times, that is $N = 20122012\dots2012$.

If N is divisible by 33, find the smallest positive integral value of k .

已知整數 N 由 k 個 “2012” 組成，即 $N = 20122012\dots2012$ ，若 33 整除 N ，

求 k 的最小正整數值。

3. If $x + \frac{1}{x} = 3$, find the value of $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

若 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，求 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 的值。

4. Ming’s calculator can provide only two operations : add 12 to the number displayed, or subtract 7 from it. Today, the calculator shows 2010. What is the minimum number of operations needed to display the number 2012?

小明的計算機只能提供兩種運算：使顯示的數字加上 12 或減去 7。今天計算機上顯示的數字是 2010。至少需要多少步運算才可使顯示的數字變為 2012？

5. It is given that x and y are two positive integers. If the product of these two integers is less than x^2 by 2012, find the smallest value of the sum of these two numbers.

已知 x 、 y 是兩個正整數，若該兩個數的乘積比 x^2 小 2012，求該兩個數之和的最小值。

6. $ABCDEF$ is a regular hexagon of unit area. What is the area of $\triangle ABF$?

$ABCDEF$ 是一個面積為 1 的正六邊形， $\triangle ABF$ 的面積是多少？

7. A two-digit number is equal to the square of the sum of its digits. Find all the possible two-digit numbers.

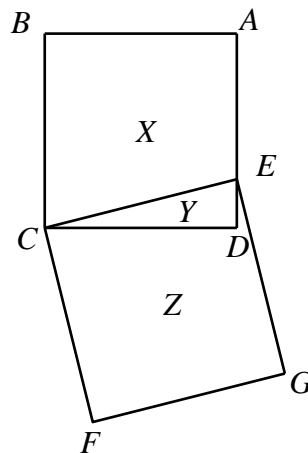
一個兩位數等於它的數字和之平方。求該兩位數的所有可能值。

8. The mean of 7 integers is x (correct to 2 decimal places). When Siu Keung calculated this mean, his result is 20.12 where the last digit is wrongly calculated. Find the correct value of x (correct to 2 decimal places).

七個整數的平均數為 x (準確至兩位小數)。小強計算這平均數時，卻將最後一個位算錯了，他的錯誤答案是 20.12，求 x 的正確值。

- 9*. In the figure, $ABCD$ and $ECFG$ are two squares. The point E lies on AD . If the area of the regions X , Y and Z are 114, 30 and 139 respectively, find the length of ED .

圖中， $ABCD$ 及 $ECFG$ 均為正方形，點 E 在 AD 上。若 X 、 Y 及 Z 三個區域的面積分別為 114、30 及 139，求 ED 的長度。



10. \overline{abc} is a three-digit number, where $a < b < c$. The sum of the other five numbers formed by using a , b and c is 3194. Find the three-digit number \overline{abc} .

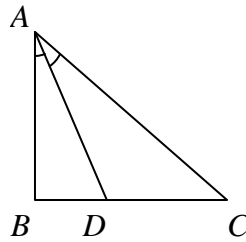
\overline{abc} 是一個三位數，其中 $a < b < c$ ，由 a 、 b 及 c 三個數字組成的另外五個三位數之和是 3194，求該三位數 \overline{abc} 。

11. It is given that $\triangle ABC$ is an equilateral triangle. If the coordinates of A and B are $(-4, 0)$ and $(2, 0)$ respectively, find the coordinates of C .

已知 $\triangle ABC$ 為一等邊三角形。若 A 及 B 的坐標分別為 $(-4, 0)$ 及 $(2, 0)$ ，求 C 的坐標。

12. The lengths of AB , BC and CA of $\triangle ABC$ are 3, 4 and 5 respectively. The angle bisector of $\angle BAC$ intersects BC at D . Find the area of $\triangle ABD$.

$\triangle ABC$ 的邊長 AB 、 BC 及 CA 分別為 3、4 及 5。 $\angle BAC$ 的角平分線相交 BC 於 D 。求 $\triangle ABD$ 的面積。

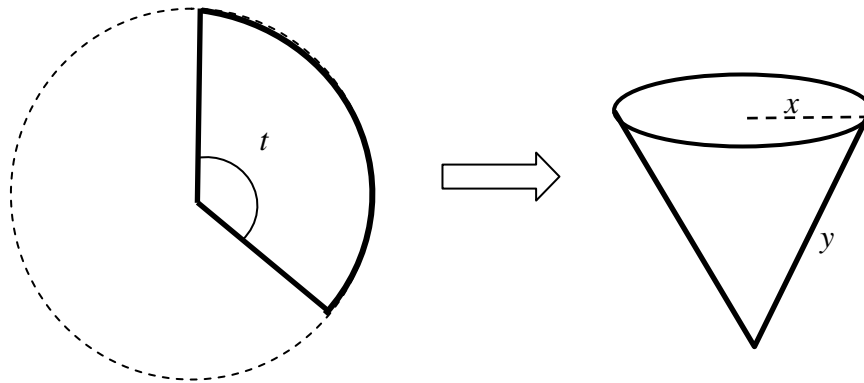


13. If $x + y = 5$ and $z^2 = xy + y - 9$, find the value of $2x + 11y + 2012z$.

若 $x + y = 5$ 及 $z^2 = xy + y - 9$ ，求 $2x + 11y + 2012z$ 的值。

14. A sector of circle can be rolled into a cone. Suppose x and y are the base radius and slant height of the cone respectively, while t is the size of the angle of the circular sector obtained. If the base radius of the cone is half of the slant height of the cone, find the size of angle t in degree.

一個扇形可以捲成一個圓錐體。設 x 及 y 分別為圓錐體的底半徑及斜稜的長度及 t 為該扇形的圓心角度。若圓錐體的底半徑是斜稜長度的一半，求 t 的大小（單位為度）。



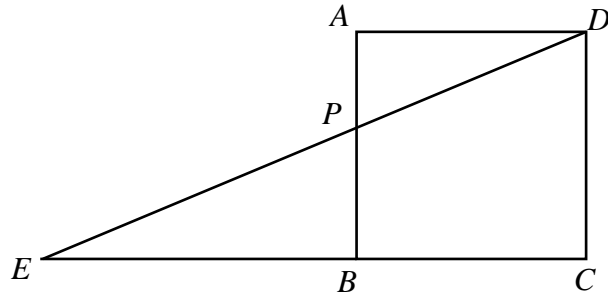
15. The lengths of the sides of a right-angled triangle are a , b , c where c is the length of hypotenuse. If

$$\frac{a+b+c}{a+c} = \sqrt{2} \quad \text{and the area of the triangle is 2, find the perimeter of the triangle.}$$

一個直角三角形的三邊長度為 a 、 b 、 c ，其中 c 為斜邊的長度。若 $\frac{a+b+c}{a+c} = \sqrt{2}$ ，且該三角形的面積為 2，求該三角形的周界。

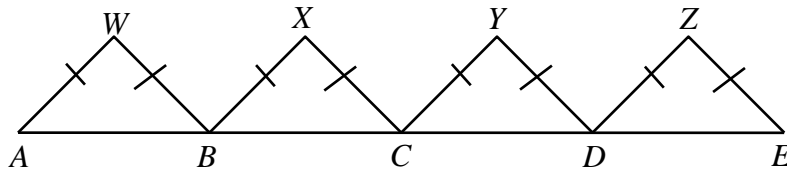
16. In the figure, the length of the sides of the square $ABCD$ is 1. The point E lies on the extension of CB , join ED and it intersects AB at P with $PE = \sqrt{3}$, find the value of $BE - PB$.

圖中正方形 $ABCD$ 的邊長是 1，點 E 為 CB 延長線上的一點，連接 ED 相交 AB 於 P ，且 $PE = \sqrt{3}$ ，求 $BE - PB$ 的值。



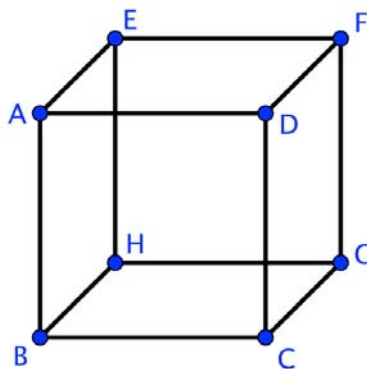
17. In the figure, $\triangle AWB$, $\triangle BXC$, $\triangle CYD$ and $\triangle DZE$ are four identical isosceles triangles with A , B , C , D and E lie on the same straight line. A new triangle is formed with the same lengths as AX , AY and AZ . If $AZ = AE = 4$, find the area of the new triangle.

圖中， $\triangle AWB$, $\triangle BXC$, $\triangle CYD$ 及 $\triangle DZE$ 為 4 個大小相同的等腰三角形，其中 A 、 B 、 C 、 D 及 E 在一條直線上。利用與 AX 、 AY 及 AZ 同樣長度的邊構成一個新三角形，若 $AZ = AE = 4$ ，求該新三角形的面積。



18. 圖中為一個正方體，利用該正方體的其中三個頂點可以組成多少個直角三角形？

Figure shows a cube. By choosing any 3 vertices of the cube, how many right-angled triangles can be formed?



乙部 (每題 6 分)

把完整的題解和答案寫在答題紙所提供的位置。

19. Find the sum of all positive integral roots of the equation

$$\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+16-6\sqrt{x+7}} = 2.$$

求方程 $\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+16-6\sqrt{x+7}} = 2$ 的所有正整數根之和。

20. The digits of the number on the screen of a four-digit calculator are displayed with seven-segment-display numerals.

Mr. Chan reads a 4-digit number from 0000 to 9999 on the screen of the calculator, and then he turns the calculator by 180° . If he can still read a number from 0000 to 9999 after a rotation by 180° , we call this four-digit number a “reversible number”. For example, rotate 2012 by 180° will give 2102, so 2012 is a “reversible number”; while 4180 is NOT a “reversible number”.

- (a) How many “reversible numbers” are there between 0000 and 9999 inclusively?
- (b) How many “reversible numbers” are read the same after a rotation by 180° ?
- (c) Suppose we are to write a four-digit number (using seven-segment-display) on a card to display all numbers from 0000 to 9999, what is the minimum number of cards we need to write?

有一部四位數字的計算機螢幕所顯示的數字是利用七劃管寫法的。

陳先生在計算機螢幕讀得一個由 0000 至 9999 的四位數後，他將該計算機旋轉 180° ，若他在計算機螢幕旋轉 180° 後所讀得的仍是一個由 0000 至 9999 的數的話，我們稱該數為「倒轉數」，例如：2012 旋轉 180° 後得 2102，所以 2012 是「倒轉數」，而 4180 就不是「倒轉數」。

- (a) 由 0000 至 9999 中，有多少個「倒轉數」？
- (b) 有多少個「倒轉數」在旋轉 180° 後與原來所讀得的是相同的？
- (c) 若將該計算機所顯示 0000 至 9999 的每一個四位數 (利用七劃管寫法) 分別寫在一張紙卡上，那麼最少需要多少張紙卡才能寫齊該計算機所顯示的所有四位數？

21. $\triangle ABC$ is a right triangle with hypotenuse AC . An inscribed square is a square whose vertices lie on some of the sides of $\triangle ABC$. If $AB = 3$, $BC = 4$ and $AC = 5$, what is the area of the smallest inscribed square? (You can leave the answer in the form of a fraction.)

$\triangle ABC$ 為一個直角三角形， AC 為其斜邊。一個內接正方形的頂點是在 $\triangle ABC$ 的某些邊上。若 $AB = 3$ 、 $BC = 4$ 及 $AC = 5$ ，最小內接正方形的面積是多少？(答案可用分數表示)

~ End of paper 全卷完 ~

擬題委員會： 蕭文強教授(香港大學)、吳端偉副教授(香港大學)、李文生先生(香港大學)、
馮德華老師、徐崑玉老師、郭家強老師、潘維凱老師